פרופ' נפתלי לנגברג

סעיף א:

טבלאות תמותה

סימון:

המ.מ. הבדיד K המקבל את הערכים $0,1,2,\ldots$ מתאר את אורך החיים המקרי של נפש הנמדד ביחידות זמן שלמות.

הגדרה:

גיל נפש יציין את מספר יחידות הזמן השלמות שחיה נפש.

הערות:

(א) המ.מ. הבדיד K נקבע על ידי **פונקצית ההסתברות**: **P(K=k)**, $k=0,1,2,\ldots$,

(ב) עבור $k=0,1,2,\ldots$ מתקיים:

$$P(K\geq k)=\sum_{r=k}^{\infty}P(K=r)\,,$$

$$P(K=k)=P(K\geq k)-P(K\geq k+1)\,.$$

לכן המ.מ. הבדיד K נקבע גם על ידי הפונקציה: $P(K\geq k)$, $k=0,1,2,\ldots$. פונקציה זו נקראת **פונקצית השרידות** של המ.מ. K,

(ג) **טבלת תמותה** היא דרך לתאר את אורך החיים הבדיד של נפש, (או את המ.מ. הבדיד K).

(ד) יחידת זמן יכולה להיות, בין היתר: שנה, רבעון, חודש, שבוע או יום.

הגדרות:

(א) טבלת תמותה היא סדרת לא יורדת של מספרים ממשיים אי שליליים $l_0,l_1,\ldots$ עם איבר ראשון חיובי. כלומר: טבלת תמותה היא סדרת מספרים המקיימת:

$l_0\geq l_1\geq l_2\geq\ldots$, ו $l_0>0$.

(ב) טבלת תמותה $\{l_k:k=0,1,2,\ldots\}$ מתארת את המ.מ. הבדיד K אם מתקיים:

פרופ' נפתלי לנגברג

$$P(K \ge k) = \frac{l_k}{l_0}, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

סימון:

תהי $\{l_k : k = 0,1,2,\ldots\}$ טבלת תמותה, ויהי $\omega = \max\{k : l_k > 0\}$. (אם יש אין סוף איברים חיובים בטבלת התמותה נגדיר את ω להיות שווה ל- ∞).

הערות:

(א) אם $\omega < \infty$ אז ω הוא האינדקס הגדול ביותר המקיים $l_\omega > 0,\ l_{\omega+1} = 0$.

(ב) אם טבלת התמותה מתארת את המ.מ. K ואם $\omega < \infty$ אז הערך המכסימלי שמקבל המ.מ. הבדיד K שווה ל- ω.

(ג) אם טבלת התמותה מתארת את אורך החיים הבדיד של נפש ואם $\omega < \infty$ אז הגיל המכסימלי של הנפש שווה ל- ω.

טענה:

תהיינה $\{l_k : k = 0,1,2,\ldots\}$, $\{l'_k : k = 0,1,2,\ldots\}$ שתי טבלאות תמותה. שתי הטבלאות מתארות את אותו מ.מ. K אם ורק אם קיים מספר חיובי a כך ש:

$$l'_k = a \cdot l_k, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

הוכחה:

נניח ששתי הטבלאות מתארות את אותו מ.מ. K אז:

$$\frac{l_k}{l_0} = P(K \ge k) = \frac{l'_k}{l'_0}, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

לכן: $$l'_k = \left(\frac{l'_0}{l_0}\right) \cdot l_k, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

כלומר מתקיים התנאי: קיים מספר חיובי a ($a = \frac{l'_0}{l_0}$) המקיים:

פרופ' נפתלי לנגברג

$$k=0,1,2,\ldots,\quad l'_k=a\cdot l_k.$$

נניח שקיים מספר חיובי a המקיים את השוויון :

$$k=0,1,2,\ldots,\quad l'_k=a\cdot l_k$$

ויהיו K, K' מ.מ.י"ם המתוארים על ידי הטבלאות $\{l_k : k=0,1,2,\ldots\}$, $\{l'_k : k=0,1,2,\ldots\}$

בהתאמה. אז:

$$k=0,1,\ldots,\ P(K'\geq k)=\frac{l'_k}{l'_0}=\frac{a\cdot l_k}{a\cdot l_0}=\frac{l_k}{l_0}=P(K\geq k)$$

כלומר המ.מי"ם K, K' זהים ולכן שתי הטבלאות מתארות את אותו מ.מ.

הגדרה:

נאמר ששתי טבלאות תמותה $\{l_k : k=0,1,2,\ldots\}$, $\{l'_k : k=0,1,2,\ldots\}$ **שקולות** אם עבור

מספר חיובי a מתקיימים השיוויונים: $l'_k=a\cdot l_k$, $k=0,1,2,\ldots$.

סימונים:

תהי $\{l_k : k=0,1,2,\ldots\}$ טבלת תמותה. ל $x<\omega+1$ ו $n=0,1,\ldots$ יהי:

(א) $_np_x=\dfrac{l_{x+n}}{l_x}$ ו $_nq_x\equiv 1-{}_np_x=\dfrac{l_x-l_{x+n}}{l_x}$,

(ב) $p_x\equiv{}_1p_x$, $q_x\equiv{}_1q_x$,

הערות:

אם טבלת התמותה $\{l_k : k=0,1,2,\ldots\}$ מתארת את המ.מ. הבדיד K ואם המ.מ. K מתאר

את אורך החיים הבדיד של נפש. אז ל $x<\omega+1$ ו $n=0,1,\ldots$:

פרופ' נפתלי לנגברג

(א) $$P(K \ge x+n \mid K \ge x) = \frac{P(K \ge x+n)}{P(K \ge x)} = \frac{l_{x+n}/l_0}{l_x/l_0} = \frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_n p_x$$

כלומר: ${}_n p_x$ היא ההסתברות המותנה שהמ.מ. K יהיה גדול או שווה ל- x+n אם ידוע שהמ.מ. K גדול או שווה ל- x,

או: ${}_n p_x$ היא ההסתברות שנפש ששרדה עד לגיל x תשרוד עד לגיל x+n.

(ב)

$$P(K < x+n \mid K \ge x) = \frac{P(x \le K < x+n)}{P(K \ge x)} = \frac{P(K \ge x) - P(K \ge x+n)}{P(K \ge x)} =$$

$$\frac{(l_x - l_{x+n})/l_0}{l_x/l_0} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = {}_n q_x$$

כלומר: ${}_n q_x$ היא ההסתברות המותנה שהמ.מ. K יהיה קטן או שווה ל- x+n אם ידוע שהמ.מ. K גדול או שווה ל- x,

או: ${}_n q_x$ היא ההסתברות שנפש ששרדה עד לגיל x לא תשרוד עד לגיל x+n.

(ג) תהי $\{l_k : k = 0,1,2,\ldots\}$ טבלת תמותה המתארת את המ.מ. הבדיד K, ויהי $x_0 \le \omega$ מספר טבעי. אז עבור $k \ge x_0$ $P(K \ge k \mid K \ge x_0) = \frac{P(K \ge k)}{P(K \ge x_0)} = \frac{l_k}{l_{x_0}}$.

כלומר: הטבלה החלקית $\{l_k : k = x_0, x_0+1, x_0+2,\ldots\}$ מתארת את המ.מ. המותנה $K \mid K \ge x_0$ או את אורך החיים הבדיד של הנפש מגיל x_0 ואילך.

פרופ' נפתלי לנגברג

(ד) מאחר $l_{x+1} = l_x \cdot p_x$, $0 \le x \le \omega$, ניתן לבנות טבלת תמותה על ידי :

(i) אחד מערכי הטבלה נניח l_x,

(ii) כל ערכי p_x, $0 \le x \le \omega$.

(ה) בספריה **Life 05-06** בתת הספרייה **"Tables"** נמצאים 16 קבצי אקסל של טבלאות תמותה. בגיליון מס 2 של כל קובץ בעמודה B מופיעה טבלת התמותה השנתית עם שם הטבלה המתאים לפי הפרוט הבא:

B.L.M , L.M.S.F ,L.M.S.M ,E.L.T.-No 12-m ,a(55)-f a(55)-m ,A1967-70

,PFA92Base , E.L.T.-No 15-m, E.L.T.-No 15-m ,AM92 , AF92 , B.L. F

.PMA92C20 ,PFA92C20 ,PMA92Base

.

דוגמה 1:

(I) נתונה טבלת תמותה חלקית:

x	40	41	42	43	44	45	50
l_x	80,935	80,480	79,999	79,488	78,942	78,357	74,794

חשב בעזרת הטבלה החלקית הנתונה את:

(א) $_5q_{40},\ _5p_{40}$

(ב) $p_{40},\ q_{40}$

(II)

בטבלת התמותה A1967-70 חשב את: $_{20}p_{40},\ _{30}q_{25}$.

פתרון:

כל החישובים יערכו בקובץ בשם **"Cha1.Examples"** בגיליון בשם **"דוגמה 1"**

(I)

בתאים A7-A13 נציג את הגילאים הרלוונטיים ובתאים B7-B13 נציג את ערכי טבלת התמותה.

(א)

את $_5p_{40}=\frac{l_{45}}{l_{40}}$ נחשב בתא C1 ולכן נרשום בתא C1 נרשום: =B12/B7,

את $_5q_{40}=1-\frac{l_{45}}{l_{40}}$ נחשב בתא C2 ולכן נרשום בתא C2 נרשום: =1-B12/B7,

(ב)

את $q_{40}=1-\frac{l_{41}}{l_{40}}$ נחשב בתא C3 ולכן נרשום בתא C3 נרשום: =1-B8/B7,

את $p_{40}=\frac{l_{41}}{l_{40}}$ נחשב בתא C4 ולכן נרשום בתא C4 נרשום: =B8/B7.

(II)

בתאים E7-E42 נציג את הגילאים הרלוונטיים ובתאים F7-E42 נציג את ערכי טבלת התמותה.

את $_{30}q_{25}=1-\frac{l_{55}}{l_{25}}$ נחשב בתא F2 ולכן נרשום בתא F2 נרשום:

=1-F37/F7,

את $_{20}p_{40}=\frac{l_{60}}{l_{40}}$ נחשב בתא F3 ולכן נרשום בתא F3 נרשום: =F42/F22.

דוגמה 2:

אורך החיים הבדיד של אדם מתואר על ידי טבלת תמותה הנתונה חלקית להלן:

	30	40	50	60	70	80
l_x	**9,480,358**	**9,241,359**	**8,762,306**	**7,698,698**	**5,592,012**	**2,626,372**

חשב:

(א) את ההסתברות שאדם שהגיע לגיל 30 יחיה לפחות עוד 40 שנה,

(ב) את ההסתברות שאדם שהגיע לגיל 30 ימות לפני גיל 70,

(ג) את ההסתברות שאדם שהגיע לגיל 30 ימות בין הגילים 60 ו 80.

פתרון:

כל החישובים יערכו בקובץ בשם **"Cha1.Examples"** בגיליון בשם **"דוגמה 2"**

בתאים A7-A12 נציג את הגילאים הרלוונטיים ובתאים B7-B12 נציג את ערכי טבלת התמותה.

(א)

את $_{40}p_{30} = \frac{l_{70}}{l_{30}}$ נחשב בתא C5 ולכן נרשום בתא C5 נרשום: =B11/B7.

(ב)

את $_{40}q_{30} = 1 - \frac{l_{70}}{l_{30}}$ נחשב בתא C7 ולכן נרשום בתא C7 נרשום: =1-B11/B7.

(ג)

את ההסתברות $\frac{l_{60} - l_{80}}{l_{30}}$ נחשב בתא C9 ולכן נרשום בתא C9 נרשום:

=(B10-B12)/B7.

סימון:

עבור $x = 0,1,\ldots$ יהי $d_x = l_x - l_{x+1}$.

דוגמה 3:

לכל אחת מ- 16 טבלאות התמותה השנתיות חשב ושרטט את הפונקציות: l_x, d_x ו q_x.

פתרון:

כל החישובים יערכו בתת הספרייה **"Tables"** בקובץ בשם המתאים לטבלת התמותה.

נשרטט את הפונקציות l_x, d_x, q_x עבור טבלת התמותה **A1967-70**.

שרטוט שלוש הפונקציות האלו עבור שבע טבלאות התמותה האחרות דומה.

שרטוט שלושת הפונקציות עבור A1967-70 בקובץ בשם A1967-70

שלב א: **<u>חישוב ערכי הפונקציות</u>** d_x, q_x **בגיליון מספר 2 בקובץ A1967-70.**

בתאים D4-D114 נציג את ערכי d_x ובתאים E4-E114 נציג את ערכי q_x,

עבור $x = 0,1,\ldots,110$.

בתא D4 נרשום: =B4-B5 ובתא E4 נרשום: =D4/ B4 את התאים D4-E4

נעתיק לתאים D5-E114 ונקבל את ערכי הפונקציות d_x, q_x.

שלב ב: **<u>שרטוט הפונקציה</u>** l_x **בגיליון מספר 4 בקובץ A1967-70.**

הפונקציה l_x נתונה על ידי תאים בשתי עמודות A ו B בגיליון מס 2. התאים

A4-A115 מציינים את ערכי הארגומנט של הפונקציה (את ערכי ה- x ים),

והתאים B4-B115 את ערכי הפונקציה המתאימים לערכי הארגומנט (ערכי

הפונקציה l_x)

(a) נצבע את התאים A4-B115 בגיליון מס 2, ונעתיק אותם לתאים A4-B115

בגיליון 4. בגיליון 4 נצבע את התאים A4-B115

(b) נבחר בסרגל הכלים את ה- **Chart-Wizard**,

(c) ב- חלון שנפתח נבחר ב- **XY (Scatter)**,

(d) ב- **חלון שנפתח** נבחר באחד מחמשת הרבועים (נניח בריבוע הימני בשורה

פרופ' נפתלי לנגברג

השנייה), ונלחץ על **Next** הנמצא בתחתית החלון,

(e) בחלון שנפתח נלחץ על **Data Range**. מאחר והפונקציה מוצגת בעזרת

עמודות (columns) נסמן ב- **Series in** את ה- **Columns** ונלחץ על **Next**,

(f) בחלון שנפתח נלחץ על **Titles** ובחלון שנפתח תחת **Chart title** נרשום

l(x) ונלחץ על **Next** בחלון שנפתח נלחץ על **Finish**.

אנו מקבלים את הגרף.

לסיום נעצב את הגרף שקבלנו.

ראשית נלחץ ימנית עם העכבר על הריבוע **Series 1** ובחלון הנפתח נלחץ

על **Clear**. הריבוע Series 1 יעלם.

שינוי ערכי הציר האופקי:

נלחץ ימנית עם העכבר על אחד מערכי x המופיעים ובחלון הנפתח נלחץ

על **Format Axis**. בחלון שנפתח נלחץ על **Scale** ובחלון שנפתח

נרשום:

Minimum	0
Maximum	120
Major unit	15
Minor unit	10

ונאשר על ידי לחיצה על **OK** בתחתית החלון.

שינוי ערכי הציר האנכי:

נלחץ ימנית עם העכבר על אחד מערכי y המופיעים ובחלון הנפתח נלחץ

על **Format Axis**. בחלון שנפתח נלחץ על **Scale** ובחלון שנפתח נרשום:

Minimum	0
Maximum	40,000
Major unit	10,000
Minor unit	10

ונאשר על ידי לחיצה על **OK** בתחתית החלון.

נלחץ על מסגרת הגרף עם העכבר ונגדיל (או נקטין) את הגרף לממדים שישביעו את רצוננו.

שלב ג <u>שרטוט הפונקציה</u> d_x

הפונקציה d_x נתונה על ידי תאים בעמודות A ו D בגיליון מס 2. התאים A4-A114 בגיליון מס 2 מציינים את ערכי הארגומנט של הפונקציה (את ערכי ה- x ים), והתאים C4-C114 בגיליון מס 2 מציינים את ערכי הפונקציה המתאימים לערכי הארגומנט (ערכי הפונקציה d_x)

(a) מאחר ושתי העמודות A ו D אינן צמודות על מנת לצבוע אותן נבצע את הפעולות הבאות בגיליון מס 2:

נצבע את התאים A4-A114, ונלחץ על מקש ה- **Ctrl** ונצבע את התאים D4- D114. לאחר שנסיים לצבוע את התאים שבעמודה D נרפה ממקש ה- **Ctrl**. נעתיק את התאים בעמודות A ו D בגיליון מס 2 לתאים המתאימים בעמודות I ו J בגיליון 4,

ההמשך הוא בדיוק כמו בשרטוט הפונקציה l_x למעט השינוי היחיד בשלב (f)

כאשר נרשום תחת **d(x) Chart title** (ולא l(x)).

שלב ד <u>שרטוט הפונקציה</u> q_x

(a) מאחר ושתי העמודות A ו E בגיליון מס 2 אינן צמודות על מנת לצבוע אותן

פרופ' נפתלי לנגברג

נבצע את הפעולות הבאות:

בגיליון מס 2: נצבע את התאים A4-A114, ונלחץ על מקש ה- **Ctrl** ונצבע את התאים E4-E114 לאחר שנסיים לצבוע את התאים שבעמודה ב נרפה ממקש ה- **Ctrl**. נעתיק את התאים בעמודות A ו E בגיליון מס 2 לתאים המתאימים בעמודות RI ו S בגיליון 4,

ההמשך הוא בדיוק כמו בשרטוט הפונקציה l_x למעט השינוי היחיד הוא בשלב (f) כאשר נרשום תחת **Chart title** **q(x)** (ולא l(x)).

באותו אופן נשרטט את הפונקציות q_x, d_x, l_x עבור יתר 15 הטבלאות.

הערה:

בעזרת טבלת תמותה תארנו את **ההתנהגות ההסתברותית** של נפש אחת. בעזרת טבלת תמותה ניתן גם לתאר את **ההתנהגות הממוצעת** של **אוכלוסייה סגורה** של נפשות.

הגדרה:

אוכלוסייה סגורה היא קבוצת נפשות שבעת יצירתה כול הנפשות בה היו באותו גיל ולאחר מכן לא מצטרפות אליה נפשות נוספות.

הצגת ההתנהגות הממוצעת של אוכלוסייה סגורה של נפשות:

תהי $\{l_k : k = 0,1,2,\ldots\}$ טבלת תמותה המתארת את המ.מ. הבדיד K, ויהי x_0 מספר שלם ואי שלילי.

בוחרים l_{x_0} נפשות כולן בגיל x_0 שאורכי חיים הבדידים שלהם מתוארים על ידי המ.מ.

הבדיד המותנה $K \mid K \geq x_0$.

עבור מספר שלם $y > x_0$ נחשב את המספר הממוצע של נפשות באוכלוסייה הסגורה שהגיעו לגיל y.

עבור נפש j שבאוכלוסייה הסגורה, $j=1,\ldots,l_{x_0}$, נגדיר את המ.מ. J_j המקבל את הערכים

1 ו 0 באופן הבא :

אם הנפש ה- j באוכלוסייה הסגורה מגיעה לגיל y המ.מ. J_j שווה ל- **1** , אחרת המ.מ. J_j

שווה ל- **0**. נשים לב ש עבור $j=1,\ldots,l_{x_0}$:

$$EJ_j = P(K \geq y \mid K \geq x_0) = \frac{P(K \geq y)}{P(K \geq x_0)} = \frac{\cancel{\frac{l_y}{l_0}}}{\cancel{\frac{l_{x_0}}{l_0}}} = \frac{l_y}{l_{x_0}} .$$

המספר המקרי של נפשות באוכלוסייה הסגורה שהגיעו לגיל y שווה ל: $\sum_{j=1}^{l_{x_0}} J_j$ התוחלת של

המספר המקרי של נפשות שהגיעו לגיל y שווה ל:

$$E\sum_{j=1}^{l_{x_0}} J_j = \sum_{j=1}^{l_{x_0}} EJ_j = \sum_{j=1}^{l_{x_0}} \frac{l_y}{l_{x_0}} = l_y .$$

מסקנה:

טבלת התמותה $\{l_k : k = x_0, x_0+1, \ldots\}$ מתארת את המספר הממוצע של נפשות

באוכלוסייה הסגורה בגילאים השונים החל מהגיל ההתחלתי x_0.

הערות:

(א) $d_x = l_x - l_{x+1}$ שווה למספר הנפשות הממוצע שנגרע מהאוכלוסייה הסגורה ביחידת

הגיל x,

(ב) $q_x = 1 - p_x$ שווה לפרופורצית הנפשות שנגרעו מהאוכלוסייה הסגורה ביחידת הגיל x.

פרופ' נפתלי לנגברג

(ג) $_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ שווה לפרופורצית הנפשות באוכלוסייה הסגורה ששרדו עד גיל x+n

יחסית למספר הנפשות שהיו בגיל x,

(ד) $_n q_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}$ שווה לפרופורצית הנפשות שנגרעו מהאוכלוסייה הסגורה במרווח

הגיל [x, x+n) יחסית למספר הנפשות שהיוו בגיל x.

הגדרה:

נאמר שאוכלוסייה סגורה של נפשות חשופה לטבלת תמותה $\{l_x : x = x_0, x_0+1, \ldots\}$

אם מבין הנפשות שחיו בגיל y אחוז הנפשות הממוצע שיחיה בגיל y+1 שווה ל:

$$100 \cdot \frac{l_{y+1}}{l_y}, \quad x_0 \le y \le \omega .$$