פרק ב: תזרימי מזומנים

הגדרה:

תהי $t_1 < t_2 \ldots$ סדרה של מספרים ממשיים אי שליליים, המציינים את זמני ההפקדות, ותהי

$C_1, C_2, \ldots$ סדרה של מספרים ממשיים, המציינים את סכומי הכסף שהופקדו בחשבון בזמנים

$t_1 < t_2 \ldots$ בהתאמה.

תזרים מזומנים היא סדרת הזוגות $(C_1, t_1),\ (C_2, t_2), \ldots$, המציינים את גובה הסכומים שהופקדו

ואת זמני ההפקדה.

הערות :

(א) אם C_r מקבל ערך שלילי אז בזמן t_r גורעים (או מושכים) C_r יחידות כסף מהחשבון, $r = 1,2\ldots$,

(ב) הערך של C_r יחידות כסף שהופקדו בזמן t_r מחושב בזמן 0 שווה ל: $C_r \cdot v(t_r)$, $r = 1,2,\ldots$,

(ג) הערך של C יחידות כסף שהופקדו בזמן 0 מחושב בזמן t שווה ל: $\frac{C}{v(t)}$, $r = 1,2,\ldots$,

(ד) על סמך (ב) ערך התזרים $(C_1, t_1),\ (C_2, t_2), \ldots$ מחושב בזמן 0 שווה ל: $\sum_r C_r \cdot v(t_r)$

(מחשבים את ערכו של כל תשלום בזמן 0 ואחר-כך מסכמים את הערכים האלו),

(ה) על סמך (ג) ו (ד) ערך התזרים $(C_1, t_1),\ (C_2, t_2), \ldots$ מחושב בזמן t שווה ל:

$$\frac{\sum_r C_r \cdot v(t_r)}{v(t)}$$

(בעזרת (ד) מחשבים את ערכו של התזרים בזמן 0 ומקבלים

$\sum_r C_r \cdot v(t_r)$ ואחר כך, בעזרת (ג), מחשבים את ערכו של $\sum_r C_r \cdot v(t_r)$ בזמן t).

הגדרה:

נאמר ששני תזרימים שקולים אם קימת לפחות נקודת זמן אחת בה ערכי שני התזרימים, מחושבים באותה נקודת זמן, שווים.

הערות:

(א) אם שני תזרימים שקולים אז לכל מספר ממשי t ערכיהם המחושבים ביחס ל t שווים. (אם שני תזרימים שקולים אז הם בהכרח בעלי ערך שווה ביחס לזמן 0 , ואם שני תזרימים הם בעלי ערך שווה ביחס לזמן 0 אז הם בעלי ערך שווה ביחס לכל נקודת זמן).

(ב) חישוב ערך תזרים ביחס ליחידת זמן אחת לפני התשלום הראשון נקרא חישוב **בפיגור**.

(ג) חישוב ערך תזרים ביחס לזמן בו בוצע התשלום הראשון נקרא חישוב **מראש**.

דוגמה 1:

קצבה בגובה 1,000 ש"ח משולמת בסוף כל חודש משך 15 שנה.

(א) חשב את ערך הקצבה בתחילת חודש תשלום הראשון (כלומר ב**פיגור**)

(ב) חשב את ערך הקצבה בעת התשלום החודשי האחרון.

כל החישובים הם במודל ריבית חודשית קבועה השווה ל 1.5%.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 1 "**.

התזרים הוא: $C_r = 1{,}000,\ t_r = r,\ v(t_r) = 1.015^{-r},\ r = 1,\ldots,180 = (12\cdot 15)$.

בעמודה C נחשב את ערכי ההיוון השונים. בתא C8 נחשב את $v(t_1)$ ונרשום: =1.015^-A8, נעתיק את התא C8 לתאים C9-C188, ונקבל את ערכי ההיוון: $v(t_1)$- $v(t_{180})$.

(א)

ערך הקצבה מחושב בזמן 0 שווה ל: $1{,}000\cdot\sum_{r=1}^{180}1.015^{-r}$. נחשב את ערכו של $1{,}000\cdot\sum_{r=1}^{180}1.015^{-r}$.

על מנת לחשב את $1{,}000\cdot\sum_{r=1}^{180}1.015^{-r}$ נסכם בתא C3 את התאים C9-C188 ונכפול את הסכום ב- 1000 (בתא C3 נרשום: (=1000*sum(C9:C188). התוצאה המתקבלת בתא C3 היא התשובה המבוקשת.

(ב)

בתא C5 נחשב את ערך התזרים בעת התשלום החודשי האחרון ונרשום: =C3*1.015^180.

דוגמה 2:.

הלוואה בסך 24,000 ש"ח מוחזרת ב-20 תשלומים שנתיים שווים. במודל ריבית שנתי קבוע עם ריבית שנתית השווה ל- 10% חשב את גובה ההחזר השנתי עם החישוב הוא:

(א) בפיגור,

(ב) מראש.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 2 "**.

בעמודה C ניצור את טור היוונים $v(t_r)$: בתא C8 נחשב את $v(0)$ ונרשום: =1.1^-A8. נעתיק את תא C9 לתאים C9-C28, ונקבל את ערכי ההיוון: $v(t_{20})$ - $v(t_1)$.

(א)

יהי x גובה ההחזר השנתי, אז התזרים הוא: $C_r=x,\ t_r=r,\ v(t_r)=1.1^{-r},\ r=1,\ldots,20$.

ערך ההחזרים השנתיים מחושבים בזמן 0 שווה ל: $x\cdot\sum_{r=1}^{20}1.1^{-r}$. מאחר וההלוואה הניתנת בזמן 0 היא בגובה 24,000 ש"ח נקבל ש: $x\cdot\sum_{r=1}^{20}1.1^{-r}=24{,}000$ ומכאן נובע ש: $x=\dfrac{24{,}000}{\sum_{r=1}^{20}1.1^{-r}}$.

על מנת לחשב את $\sum_{r=1}^{20} 1.1^{-r}$ נסכם בתא C7 את התאים C9-C28 ונרשום בתא C7:

=sum(C9:C28). בתא C3 נרשום: C7 /24000= ונקבל את תוצאת חלק (א).

(ב)

יהי y גובה ההחזר השנתי, אז התזרים הוא: $C_r = y, t_r = r, v(t_r) = 1.1^{-r}, r = 0,\ldots,19$.

ערך ההחזרים השנתיים מחושבים בזמן 0 שווה ל: $y \cdot \sum_{r=0}^{19} 1.1^{-r}$. מאחר וההלוואה נתנת בזמן 0 היא

בגובה 24,000 ש"ח נקבל ש: $24{,}000 = \sum_{r=0}^{19} 1.1^{-r} \cdot y$ ומכאן נובע ש: $y = \dfrac{24{,}000}{\sum_{r=0}^{19} 1.1^{-r}}$.

על מנת לחשב את $\sum_{r=0}^{19} 1.1^{-r}$ נסכם בתא E7 את התאים C8-C27 ונרשום בתא E7: (sum(C8:C27.

בתא E3 נרשום: E7 /24000= ונקבל את תוצאת חלק (ב).

דוגמה 3:

לקוח הפקיד מידי ה- 15 לנובמבר בשנים 1964-1979 (כולל את שתי השנים) 5,000 ש"ח.

(א) חשב את ערכו של התזרים ביחס ל- 15.11.1979,

(ב) חשב את ערך הסכומים שהלקוח הפקיד עד ל- 15.11.1983 מחושב ב- 15.11.1983

כל החישובים הם במודל ריבית שנתית קבוע עם ריבית שנתית השווה ל- 7%.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 3 "**.

בעמודה C נרשום את השנים 1964-1979: בתא C9 נרשום: 1964=, בתא C10 נרשום: C9+1=

ונעתיק את התא C10 לתאים C11-C24.

התזרים הוא: $C_r = 5{,}000, t_r = r, v(t_r) = 1.07^{-r}, r = 1964,\ldots,1979$.

בתאים D9-D24 נציג את ערך התזרים מהוון ל- 15.11.1964 לפי ריבית של 7%. בתא D9 נרשום: =5,000*1.07^(1964-C9), ונעתיק את התא לתאים D10-D24. בתא D1 נציג את ערך התזרים ביחס ל- 15.11.1964, ונרשום: =sum(D9:D24)

(א)

בתא F2 נחשב את ערך התזרים מחושב ביחס ל- 15.11.1979 ונרשום: =D1*1.07^15

(ב)

בתא F4 נחשב את ערך התזרים מחושב ביחס ל- 15.11.1983 ונרשום: =D1*1.07^19

הערה:

בפתרון דוגמה 4, 7, ו 8 אנו נשתמש בפונקציות מ- Excel:

בפונקצית ה**קיבוע** (אותה הכרנו בסעיף הקודם)

בפונקצית ה**חתירה למטרה** הנמצאת בסרגל הכלים (**Goal Seek**),

בפונקצית המכפלה (**Product**),

בפונקצית ה- **IF**,

דוגמה 4:

לקוח לווה 30,000 ש"ח. הלקוח מחזיר את ההלוואה ב- 15 תשלומים שנתיים בגובה 5,000 ש"ח. ההחזר הראשון הוא חמש שנים לאחר מתן ההלוואה. חשב את גובה הריבית השנתית במודל ריבית שנתית קבועה.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 4 "**.

תהי i הריבית השנתית הבלתי ידועה במודל הריבית הקבועה.

התזרים הוא: $C_r = 5{,}000,\ t_r = 5 + r,\ v(t_r) = (1+i)^{-r},\ r = 0,\ldots,14$.

ערך ההחזרים השנתיים מחושבים בזמן 0 שווה ל: $5{,}000 \cdot \sum_{r=5}^{19} (1+i)^{-r}$. מאחר וההלוואה הניתנת

בזמן 0 היא בגובה 30,000 ש"ח נקבל את המשוואה: $30{,}000 = 5{,}000 \cdot \sum_{r=5}^{19} (1+i)^{-r}$ ממנה נחלץ את i.

בתא C2 ננקוב בריבית שרירותית. בתא C3 נרשום =1+C2/100. בתאים C13-C27 נציג את טור ההייוון המתאים לריבית השרירותית שבתא C2 (אותו נקבע משך הדיון): בתא C13 נרשום: =$C$3^(-A13). נעתיק את התא C13 לתאים C14-C27. בתא C7 נרשום את סכום התאים C13-C27 ונכפול את התוצאה ב- 5000 (=5000*sum(C13:C27)).

על מנת לקבל בתא C7 את ערך ההלוואה הנכון (30,000) ולא את הערך השגוי שהתקבל אנו צריכים לשנות את ערך הריבית עד שיתאים לערך 30,000 לשם ביצוע משימה זו נשתמש בחתירה למטרה הנמצאת בסרגל הכלים: **קבע בתא** : C7, **את הערך**: 30000, **על ידי שינוי התא**: C2. עם אישור פעולת חתירה למטרה נקבל בתא C2 את הריבית השנתית הנדרשת.

דוגמה 5:

הלוואה בסך 200,000 ש"ח מוחזרת משך 18 שנה בתשלומים שנתיים שווים בפיגור.

(א) חשב את גובה ההחזר השנתי,

על מנת להקטין את התשלומים מהתשלום ה- 13 ואילך מפקיד הלווה בהחזר ה- 12 בנוסף באופן חד פעמי 10,000 ש"ח.

(ב) חשב את גובה התשלומים השנתיים המעודכנים.

כל החישובים הם במודל ריבית שנתית קבועה למקוטעין בו ב- 6 השנים הראשונות הריבית השנתית שווה ל- 10%, וביתר הזמן הריבית השנתית שווה ל- 9%.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 5 "**.

ראשית נציג כמה דרכים ליצירת עמודת ההיוונים: $k = 1, \ldots, 25,\ v(k)$.

<u>דרך I:</u>

בעמודת C בעזרת פונקצית ה- IF ניצור עמודת עזר: ב- C9 נרשום: (=IF(A9<=6,1.1,1.09

נעתיק את התא C לתאים C10-C26.

בעמודת D ניצור בעזרת פונקצית ה- Product את טור ההיוונים: ב- D9 נרשום:

=Product($C$9:C9)^-1 נעתיק את התא D9 לתאים D10-D26.

__דרך II:__

בעמודת E ניצור עמודת עזר:

בתא E9 נרשום: 1.1= ונעתיק זה לתאים E10-E14.

בתא E15 נרשום: 1.09= ונעתיק את התא לתאים E16-E26.

בעמודת F ניצור בעזרת פונקצית ה- Product את טור ההיוונים: ב- F9 נרשום:

=Product($E$9:E9)^-1 נעתיק את התא F9 לתאים F10-F26.

__דרך III:__

בעמודת G ניצור בעזרת פונקצית ה- IF ישירות את טור ההיוונים: ב- 9G נרשום:

=IF(A9<=6,1.1^-A9,1.1^-6*1.09^(6-A9))

נעתיק את התא G9 לתאים G10-G26.

__דרך IV:__

בעמודת H ניצור ישירות את טור ההיוונים:

בתא H9 נרשום: 1.1^-A9= ונעתיק תא זה לתאים H10-H14.

בתא H15 נרשום: (=$H$14*1.11^(6-A15, ונעתיק את התא לתאים H16-H26.

(א)

יהי x גובה ההחזר השנתי. התזרים הוא:

$$C_r = x,\ t_r = r,\ v(t_r) = \begin{cases} 1.1^{-t_r} & ,t_r \le 6 \\ 1.1^{-t_r}\cdot 1.06^{-(t_r-6)} & ,t_r > 6 \end{cases},\ r = 1,\dots 18\ .$$

שווי ההחזרים השנתיים מחושבים בזמן 0 שווה ל: $x \cdot \sum_{r=1}^{18} v(r)$. מאחר וההלוואה הניתנת בזמן 0 היא בגובה 200,000 ש"ח נקבל ש: $x \cdot \sum_{r=1}^{20} v(r) = 200{,}000$ ומכאן נובע ש: $x = \frac{200{,}000}{\sum_{r=1}^{18} v(r)}$.

בתאים D7, F7, G7, ו H7 נסכם את התאים המתאימים בשורות 9-26.

בתאים D3, F3, G3, ו H3 נחלק 200,000 בערך בתא המתאים בשורה 7 ונקבל את ההחזר השנתי. בתא C3 נרשום: 200000/C7= ונקבל את ההחזר השנתי.

(ב)

יהי x ההחזר השנתי שחושב בחלק (א) (בתא D3), ויהי y ההחזר השנתי המעודכן החל מהתשלום ה- 13. התזרים הוא:

$C_1 = \cdots = C_{11} = x,\ C_{12} = x + 10{,}000,\ C_r = y,\ r = 13, \cdots, 18$ יתר הנתונים של התזרים זהים לאלו שבחלק (א).

שווי ההחזרים השנתיים מחושבים בזמן 0 שווה ל: $x \cdot \sum_{r=1}^{12} v(r) + 10{,}000 \cdot v(12) + y \cdot \sum_{r=13}^{18} v(r)$.

מאחר וההלוואה נתנת בזמן 0 בגובה 200,000 ש"ח נקבל ש:

$$x \cdot \sum_{r=1}^{12} v(r) + 10{,}000 \cdot v(12) + y \cdot \sum_{r=13}^{18} v(r) = 200{,}000.$$

בעזרת חתירה למטרה נחשב את ערכו של y מהמשוואה:

$$x \cdot \sum_{r=1}^{12} v(r) + 10{,}000 \cdot v(12) + y \cdot \sum_{r=13}^{18} v(r) = 200{,}000.$$

בתא J3 נרשום 21000,התשלום השנתי המעודכן השריריותי השגוי.

בעמודה J נרשום את תזרים התשלומים בהתחשב שההחזר המעודכן נתון ב – J3.

בתא J9 נרשום =G9*$D$3, נעתיק את התא לתאים: J10-J19.

בתא J20 נרשום =G20*($D$3+10000),

בתא J21 נרשום G21*$J$3 ונעתיק את התא לתאים J22-J26.

בתא J7 נסכם את התאים J9-J26. הסכום המתקבל בתא J7 הוא גובה ההלוואה השגוי. על מנת לקבל בתא J7 את גובה הנכון של ההלוואה נשנה את ערך ההחזר המעודכן השגוי המופיע בתא J3 על ידי הפעלת חתירה למטרה שבסרגל הכלים. **קבע בתא** : J7, **את הערך**: 200000, **על ידי שינוי התא**: J3. עם אישור פעולת חתירה למטרה נקבל בתא J3 את התשלום השנתי המעודכן.

אלטרנטיבית:

מהמשוואה $200,000 = \sum_{r=13}^{18} v(r) \cdot y + v(12) \cdot 10,000 + \sum_{r=1}^{12} v(r) \cdot x$. נתן לחלץ את y ולקבל:

$$y = \frac{200,00 - x \cdot \sum_{r=1}^{12} v(r) - 10,000 \cdot v(12)}{\sum_{r=13}^{18} v(r)}.$$

נחשב בתא J5 את y ונרשום:

=(200000-D3*sum(G9:G20)-10000*G20)/sum(G21:G26)

הערה:

בתאים I9-L26 אנו מציגים דרך נוספת לחישוב עמודת ההיוונים: $v(k)$, $k = 1,\dots,25$.

דוגמה 6:

קצבה שנתית משולמת בפיגור משך עשרים שנה. התשלום הראשון שווה ל 80,000 ש"ח וכל תשלום עוקב קטן ב- 3,000 ש"ח. חשב את ערך הקצבה ביחס לתחילת השנה בה ניתן התשלום הראשון במודל ריבית שנתית קבועה השווה ל- 5%.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 6 "**.

התזרים הוא:

$$.C_r = 83{,}000 - 3000 \cdot r,\ t_r = r,\ v(t_r) = 1.05^{-r},\ r = 1,\ldots,20$$

המטרה היא לחשב את ערך התזרים בזמן 0 . שווי ההחזרים השנתיים מחושבים בזמן 0 שווה ל:

$$.\sum_{r=1}^{20} (83{,}000 - 3000 \cdot r) \cdot 1.05^{-r}$$

בתא C9 נרשום: 1.05^-A9*(83000-3000*A9)=. את התא הזה נעתיק לתאים C10-C28. לסיום נסכם בתא C7 את התאים C9-C18 ונקבל את התוצאה המבוקשת.

דוגמה 7:

קצבה משולמת מידי חצי שנה משך 6 שנים. התשלום הראשון שווה ל- 18,000 ש"ח כל תשלום עוקב קטן ב- 300 ש"ח. במודל ריבית שנתית קבועה השווה ל 10.25% חשב את ערך הקצבה שנתיים לפני התשלום הראשון.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 7"**.

התזרים הוא:

$$C_r = 18{,}300 - 300 \cdot r,\ t_r = r,\ v(t_r) = 1.05^{-r-4},\ r = 0,\ldots,11$$

בתא C2 נחשב את הריבית החצי שנתית השקולה לריבית השנתית הנתונה. נרשום: 1.1025^0.5=.

המטרה היא לחשב את ערך התזרים בזמן 0 . שווי ההחזרים השנתיים מחושבים בזמן 0 שווה ל:

$$\sum_{r=0}^{11} (18{,}300 - 3000 \cdot r) \cdot 1.1025^{-r-4}$$

. תשלום הקצבה הראשון ניתן לאחר ארבע יחידות זמן (יחידת זמן שווה ל חצי שנה). ולכן נרשום בתא C12: $C$2^-A12*(19200-300*A12)=.

את התא C12 נעתיק לתאים C13-C23 (יש 12 תשלומי קצבה חצי- שנתיים). בתא C7 נסכם את הערכים בתאים C12-C23 ונקבל את התוצאה המבוקשת.

דוגמה 8:

משקיע קונה קצבה שנתית בגובה 12,000 ש"ח לחמש שנים המשולמת בפיגור בארבעה תשלומים בכל שנה (גובה כל תשלום רבעוני הוא 3,000 ש"ח). חשב את ערך הקצבה בעת הקניה לכל אחד ממודלי הריבית הקבועים הבאים:

(א) ריבית שנתית של 12%,

(ב) ריבית חצי-שנתית של 6%,

(ג) ריבית רבעונית של 3%,

(ד) ריבית חודשית של 1%.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 8 "**.

תהי i הריבית הרבעונית המתאימה.

התזרים נתון על ידי:

$$C_r = 3{,}000,\ t_r = r,\ v(t_r) = (1+i)^{-r},\ r = 1,\dots,20.$$

שווי התשלומים הרבעוניים מחושבים בזמן 0 שווה ל: $3{,}000 \cdot \sum_{r=1}^{20} (1+i)^{-r}$.

בתאים F3,E3,D3,C3 נחשב את הריבית הרבעונית המתאימה למקרים **(א)-(ד)**.

בעמודה C נחשב את תזרים הקצבה וערכו על פי הריבית בחלק (א).

בתא C9 נרשום: =3000*C3^-A9 (מקבעים את השורה 3 על ידי הצגת ה- $ לפני 3 בסימון C3 מקבעים את עמודה A על ידי הצגת ה- $ לפני A בסימון A9).

את התא C9 נעתיק לתאים C10-C28. ובתא C7 נסכם את ערכי התאים C9-C28 ונקבל את תוצאת חלק (א).

על מנת לקבל את תוצאות החלקים **(ב)- (ד)** נעתיק את C7-C28 למטריצה: D7-F28 ונקבל בתאים F7,E7, D7 את ערכי הקצבאות המתאימים לחלקים (ב), (ג), ו (ד) בהתאמה.

דוגמה 9:

(א)

לקוח מפקיד מידי תחילת שנה משך 10 שנים 1,000 ש"ח. חשב את ערכו של תזרים הפקדות אלו בסוף תקופת ההפקדה, במודל ריבית קבועה עם תשואה שנתית של 5%.

(ב)

לקוח מפקיד בתחילת השנה ה- k ית $1{,}000+50\cdot(k-1)$ ש"ח. חשב את ערכו של תזרים הפקדות אלו לאחר 15 שנה (בסוף תקופת ההפקדות), במודל ריבית קבוע עם תשואה שנתית של 6.25%.

(ג)

בטבלה נתונים הסכומים נקובים בשקלים חדשים שהפקיד לקוח והזמנים בהם הוא הפקיד אותם.

חשב את ערכו של תזרים הפקדות אלו בסוף שנת ההפקדה האחרונה, במודל ריבית קבוע עם תשואה שנתית של 8%.

זמן	0	1	2	3	4	5	6	7
סכום	1,250	3,420	2,790	6,500	1,800	2,350	4,650	2,900

(ד)

לכל אחד משלושת התזרימים חשב את ערכו הנוכחי של התזרים (את ערכו בעת ההפקדה הראשונה).

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 9 "**.

(א)

התזרים נתון על ידי:

$C_r = 1{,}000,\ t_r = r,\ v(t_r) = 1.05^{-r},\ r = 0,\ldots,9$.

ערך התשלומים השנתיים מחושבים בזמן 10 שווה ל: $1{,}000 \cdot \sum_{r=0}^{9} 1.05^{10-r}$.

בעמודה C ניצור את טור ההצטברות יחסית לסוף תקופת ההפקדה. בתא C נרשום:

(10-A8)^1.05= ונעתיק את התא לתאים C9-C17. על מנת לקבל את התוצאה נסכם בתא C7 את

ערכי התאים C8-C17 ונכפול ב- 1000 ((=1000*sum(C8:C17)).

(ב)

התזרים נתון על ידי:

$C_r = 1{,}000 + 50 \cdot r,\ t_r = r,\ v(t_r) = 1.0625^{-r},\ r = 0,\ldots,14$.

ערך התשלומים השנתיים מחושבים בזמן 15 שווה ל: $\sum_{r=0}^{14} (1000 + 50 \cdot r) \cdot 1.0625^{15-r}$.

בתא E8 נרשום (15-A8)^1.0625*(1000+50*A8)= נעתיק את התא לתאים E9-E22. בתא

E7 נסכם את ערכי התאים E8-E22 ונקבל את תוצאת חלק (ב).

(ג)

התזרים נתון בטבלה כאשר $v(t_r) = 1.08^{-r},\ r = 0,\ldots,7$.

ערך התשלומים השנתיים מחושבים בזמן 15 שווה ל: $\sum_{r=0}^{7} C_r \cdot 1.08^{8-r}$.

בתאים G8-G15 נרשום את שמונת התשלומים בזמנים 0 עד 7.

בתא H8 נרשום: (8-A8)^G7*1.08= (הצטברות התשלום הראשון ביחס למועד התשלום

האחרון), נעתיק תא זה לתאים H9-H15. בתא H7 נסכם את ערכי התאים H8-H15 ונקבל את

תוצאת חלק (ג).

(ד)

בתא J6 נחשב ערך התזרים ב- (א) בעת ההפקדה הראשונה ונרשום: =C7*1.05^-10.

בתא J10 נחשב ערך התזרים ב- (ב) בעת ההפקדה הראשונה ונרשום: =E7*1.0625^-15.

בתא J14 נחשב ערך התזרים ב- (ג) בעת ההפקדה הראשונה ונרשום: =H7*1.08^-8.

דוגמה 10:

בטבלה נתונים הסכומים הנקובים בשקלים חדשים שהפקיד לקוח והזמנים בהם הוא הפקיד אותם. במודל ריבית קבוע עם תשואה שנתית של 8% חשב:

(א) את ערכו של תזרים הפקדות אלו בעת ההפקדה האחרונה,

(ב) את ערכו של תזרים הפקדות אלו בעת ההפקדה הראשונה.

זמן	0	0.6	1.5	3.9	4.7	7	8	9.7
סכום	1,250	3,420	2,790	6,500	1,800	2,350	4,650	2,900

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 10 "**.

(א)

בתאים C8-C15 נרשום את זמני התשלום.

בתאים D8-D15 נרשום את גובה התשלומים.

בתאים E8-E15 נחשב את ערכי התשלומים מחושבים בעת התשלום האחרון: בתא E8 נרשום: =D8*1.08^(9.7-C8) ונעתיק את התא לתאים E9-E15.

בתא C3 נסכם את ערכי התאים E9-E15 ונקבל את תוצאת חלק (א).

(ב)

בתא D3 נרשום: =C3*1.08^-9.7 ונקבל את תוצאת חלק (ב).

דוגמה 11:

נתון מודל ריבית קבועה למקוטעין הבא:

$$n_1 = 4, n_2 = 5, n_3 = 6, \quad i_1 = 7\%, i_2 = 5\%, i_3 = 8\%,\ i_4 = 4\% \ .$$

לכל אחד משלושת התזרימים שבדוגמה 9 ולתזרים שבדוגמה 10 חשב את ערכו הנוכחי של התזרים מראש. (את ערכו בעת ההפקדה הראשונה).

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 11 "**.

בעמודה E ניצור את טור היוונים. בתא E8 נרשום:

=1.07^(-A8)*IF(A8<=4,”1”)+1.07^-4*1.05^(4-A8)*and(A8>4, A8<=9)+

1.07^-4*1.05^-5*1.08^(9-A8)*and(A8>9, A8<=15)+

1.07^-4*1.05^-5*1.08^(-6)*1.04^(15-A8)*IF(A8>15,”1”)

את התא E8 ונעתיק לתאים E9-E28.

אלטרנטיבית I:

בתא F8 נרשום 1.07^-A8= ונעתיק תא F8 לתאים F9-F12.

בתא F13 נרשום: (1.07^-4*1.05^(4-A8 ונעתיק תא F13 לתאים F14-F17.

בתא F18 נרשום: (1.07^-4*1.05^(-5)*1.08^(9-A8= ונעתיק תא F18 לתאים F19-F23.

בתא F24 נרשום (1.07^-4*1.05^(-5)*1.08^(-6)*1.04^(15-A8=

ונעתיק תא F24 לתאים F25-F28.

אלטרנטיבית II:

בתא G8 נרשום 1= בתא G9 נרשום G8/1.07= ונעתיק את התא לתאים G10-G12.

בתא G13 נרשום G12/1.05= ונעתיק את התא לתאים G13-G17.

בתא G18 נרשום G17/1.08= ונעתיק את התא לתאים G19-G23.

בתא G24 נרשום G23/1.04= ונעתיק את התא לתאים G25-G27.

9 (א)- 9 (ג):

בעמודה H נרשום את תזרים התשלומים המתאים ל- **9 (א):**

בתא H8 נרשום: ("1",A8<10)IF*1000= ונעתיק את תא זה לתאים: H9-H22.

בעמודה I נרשום את תזרים התשלומים המתאים ל- **9 (ב):**

בתא I8 נרשום: ("1",A8<15)IF*(1000+50*A8)=

ונעתיק את תא זה לתאים: I9-I22.

בעמודה J נרשום את תזרים התשלומים המתאים ל- **9 (ג):**

בתא J8 נרשום: ("1",A8<8)IF*C8= . ונעתיק את תא זה לתאים: J9-J22.

בעמודה K נחשב את ערך התזרים המתאים ל- **9 (א)** מחושב בזמן 0:

בתא K8 נרשום: $E8*H8= ונעתיק תא זה לתאים K9-K22. בתא K7 נרשום:

(sum(H8:H22=ונקבל את ערך התזרים המתאים ל- 9 (א) מחושב בזמן 0.

נעתיק את התאים K7-K22 למטריצה L7-M22 ונקבל בתאים L7, M7 את שווי

התזרימים 9 (ב) ו 9 (ג) מחושבים בזמן 0 בהתאמה.

10:

בעמודות C ו D נציג את זמני וערכי תזרים המזומנים הנתון בדוגמה 10.

בעמודה N ניצור את טור ההיוונים. בתא N8 נרשום:

=1.07^(-D8)*IF(D<=4,"1")+1.07^-4*1.05^(4-D8)*and(D8>4, D8<=9)

1.07^-4*1.05^-5*1.08^(9-D8)*and(D8>9, D8<=15)+

1.07^-4*1.05^-5*1.08^(-6)*1.04^(15-D8)*IF(D8>15,"1")

את התא N8 נעתיק לתאים N9-N28.

בעמודה O נציג את התזרים מחושב בזמן 0: בתא O8 נרשום: C8*N8=

ונעתיק תא זה לתאים: O9-O15. בתא O7 נרשום: =sum(O8:O15) ונקבל את ערך התזרים המתאים ל- 10 מחושב בזמן 0.

הערה:

בדוגמה הבאה נעשה שימוש במכשיר חשוב ויעיל הנקרא **מאקרו** (**Macro**)

דוגמה 12:

הלוואה בגובה 200,000 ש"ח מוחזרת בפיגור ב- n תשלומים שנתיים שווים כל אחד בגובה 15,000 ש"ח. חשב את התשואה השנתית המושגת על ידי נותן ההלוואה עבור n=16,20,26,30.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 12 "**.

דרך א:

בתא C2 נרשום את אחד מערכי n, למשל 16

בתא C4 נרשום ערך ריבית שנתית שרירותית, למשל 5.

בתאים C9-C67 נרשום את ערכי התשלומים מהוונים לעת מתן ההלוואה על פי התשואה השנתית השרירותית: בתא C9 נרשום = IF(A9<=$C$2,15000*(1+$C$4/100)^-A9,0)

ונעתיק תא זה לתאים C10-C67.

בתא C7 נרשום את ערך התזרים מהוון לעת ההנפקה: =sum(C9:C67) ונקבל את ערך התזרים מהוון לעת מתן ההלוואה על פי התשואה השרירותית.

על מנת לקבל את התשואה הנכונה נשתמש בחתירה למטרה: **התא**: C7 **לערך**: 200,000 **על ידי שינוי התא**: C4. על ידי אישור הפעולה נקבל את התשואה השנתית הנדרשת עבור 16 תשלומים.

נרשום עתה בתא C2 את הערך 20 ונחזור על פעולת חתירה למטרה ונקבל את התשואה השנתית הנדרשת עבור 20 תשלומים. נרשום בתא C2 את הערך 26 ונחזור על פעולת חתירה למטרה ונקבל את התשואה השנתית הנדרשת עבור 26 תשלומים, לסיום נרשום בתא C2 את

הערך 30 ונחזור על פעולת חתירה למטרה ונקבל את התשואה השנתית הנדרשת עבור 30 תשלומים. את התשואות שקבלנו ל- n ים השונים נרשום בתאים E9-E12.

כפי שרואים החזרות האלו גוזלות זמן ואם מספר ה- n ים מאוד גדול הדרך המוצעת אינה מעשית.

דרך ב:

על מנת להימנע מחזרה על הפעולות עבור כל ערך n נשתמש בכלי ה**מאקרו, Macro**.

בתא G2 נרשום את אחד מערכי n, למשל 16,

בתא G4 נרשום ערך ריבית שנתית שרירותית, למשל 5.

בתאים G9-G60 נרשום את ערכי התשלומים מהוונים לעת מתן ההלוואה על פי התשואה השנתית השגויה: בתא G9 נרשום (A9,0-^(1+$G$4/100)*IF(A9<=$G$215000 =

ונעתיק תא זה לתאים G10-G60. בתא G7 נרשום: ((sum(G9:G60= ונקבל את ערך התזרים מהוון לעת מתן ההלוואה על פי התשואה השרירותית.

הקלטת המאקרו:

(a) בסרגל הכלים נבחר **Macro**, ב- Macro נבחר **Record New Macro** בתיבה שנפתחה נרשום מתחת ל- Shortcut בתיבה המתאימה A ונאשר את הפעולה. כעת אנו מוכנים להקליט את Macro1:

(b) בסרגל הכלים נבחר חתירה למטרה **התא**: G7 **לערך**: 200000 **על ידי שינוי התא**: G4 ונאשר את הפעולה

(c) בסרגל הכלים נבחר **Macro**, ב- Macro נבחר **Stop Recording**, על ידי בחירה זו הפסקנו את הקלטת המאקרו.

בתא G4 קבלנו את התשואה השנתית המתאימה ל- 16 תשלומים. אותה נעתיק (special paste value) לתא I9.

נרשום בתא G2 את הערך 20 ונלחץ סימולטנית על Ctrl+Shift+A ונקבל בתא G4 את התשואה השנתית המתאימה ל- 20 תשלומים נעתיק אותה (special paste value) לתא I10. נעיר שהמאקרו שהפעלנו בוחר חתירה למטרה ומוצא את התשואה המתאימה ל n=20.

נרשום בתא G2 את הערך 26 ונלחץ ביחד על Ctrl+Shift+A ונקבל בתא G4 את התשואה השנתית המתאימה ל- 26 תשלומים, אותה נעתיק (special paste value) לתא I11.

הערה:

במקום ללחוץ סימולטנית על Ctrl+Shift+A, הנותנת דרך קיצור להפעלת מאקרו מספר 1, ניתן להפעיל את המאקרו בדרך הרגילה:

(a) בסרגל הכלים נבחר **Macro**, ב- Macro נבחר **Macro**

(b) בתיבה שנפתחה נסמן את **Macro1** ונלחץ על run ונפעיל את המאקרו.

נרשום בתא G2 את הערך 30 נחזור על הפעולה ונקבל בתא G4 את התשואה השנתית המתאימה ל- 30 תשלומים אותה נעתיק (special paste value) לתא I12.

דרך ג:

למרות שדרך ב' קצרה יותר מדרך א' עדין אנו צריכים לחזור ידנית על הפעולה 4 פעמים ואם מספר ה- n ים היה מאוד גדול דרך זו לא הייתה מעשית. נציג עתה עידכון ל- Macro שיאפשר לעבור מערך אחד של n לערך אחר של n ללא התערבותנו ובנוסף ליד כל ערך של n תרשם התשואה השנתית המתאימה ללא התערבותנו. נבצע זאת עבור $n = 16, 18, \ldots, 54$.

בתא K2 נרשום את אחד מערכי n, למשל 16,

בתא K4 נרשום ערך ריבית שנתית שרירותית, למשל 5.

בתאים K9-K67 נרשום את ערכי התשלומים מהוונים לעת מתן ההלוואה על פי התשואה השנתית השגויה: בתא K9 נרשום (IF(A9<=$K$215000*(1+$K$4/100)^-A9,0 = ונעתיק תא זה לתאים K10-K60.

בתא K6 נרשום: (sum(C9:C67= ונקבל את ערך התזרים מהוון לעת מתן ההלוואה על פי התשואה השרירותית.

בתא L9 נרשום 16= בתא L10 נרשום L9+2= ונעתיק את התא L10 לתאים L11-L28.

הקלטת המאקרו:

(a) בסרגל הכלים נבחר **Macro**, ב- Macro נבחר **Record New Macro** ונאשר את הפעולה. כעת אנו מוכנים להקליט את Macro 2:

(b) את התא L9 נעתיק **כערך** לתא K2,

(c) בסרגל הכלים נבחר חתירה למטרה **התא**: K7 **לערך**: 200,000 **על ידי שינוי התא**: K4 ונאשר את הפעולה,

(d) נעתיק את **הערך** שבתא K4 לתא M9 (על ידי העתקה מיוחדת),

(e) בסרגל הכלים נבחר **Macro**, ב- Macro ונבחר **Stop Recording**, על ידי בחירה זו הפסקנו את הקלטת המאקרו.

(f) בסרגל הכלים נבחר **Macro**, ב- Macro נבחר **Macros**, נצבע את Macro2 ונלחץ על Edit ונקבל את הטקסט הבא:

```
Sub Macro2()
 "Macro2 Macro
 'Macro recorded 27/06/2002 by UNIVERSITY OF HAIFA
 "Keyboard Shortcut: Ctrl+Shift+B
   Range("L9").Select
   Selection.Copy
```

```
    Range("K2").Select
    ActiveSheet.Paste
    Application.CutCopyMode = False
    Range("K7").GoalSeek Goal:=0, ChangingCell:=Range("K4")
    Range("K4").Select
    Selection.Copy
    Range("M9").Select
    ActiveSheet.Paste
End Sub
```

על מנת להתאים את הטקסט למטרתנו נעשה בו את השינויים הבאים:

בשורה מעל .Range("L9") נרשום: For Index = 9 To 28,

במקום .Range("L9") נרשום: .Range("L" & Index),

במקום .Range("M9") (שורה שלישית מהסוף) נרשום: .Range("M" & Index),

בין שתי השורות האחרונות נוסיף שורה ונרשום: Next Index,

לסיום נלחץ בסרגל על הריבוע הכחול (Reset) ואחר כך נלחץ בסרגל על המשולש הכחול (Run) ונקבל בתאים M9-M28 את התשואות השנתיות המתאימות.

בסרגל הכלים נבחר Macro, ב- Macro נבחר Macros, נצבע את Macro2 ונלחץ על Edit ונקבל את הטקסט אחר התיקונים. הטקסט נראה באופן הבא:

```
Sub Macro2()
'
' Macro2 Macro
' Macro recorded 27/06/2002 by UNIVERSITY OF HAIFA
'
```

```
'Keyboard Shortcut: Ctrl+Shift+B
For Index = 9 To 28
    Range("L" & Index).Select
    Selection.Copy
    Range("K2").Select
    ActiveSheet.Paste
    Application.CutCopyMode = False
    Range("K7").GoalSeek Goal:=0, ChangingCell:=Range("K4")
    Range("K4").Select
    Selection.Copy
    Range("M" & Index).Select
    ActiveSheet.Paste
Next Index
End Sub
```

הערה:

בדוגמה הבאה נעשה שימוש בשתי פונקציות: בפונקצית ה- **INT()** ובפונקצית ה- **Lookup**.

דוגמה 13:

קצבה רבעונית משולמת משך עשרים שנה מראש. סך הקצבה המשולמת בשנה ה- k ית שווה ל- $1{,}000 \cdot k$ ש"ח, $k = 1, \ldots, 20$. חשב את הערך הנוכחי של הקצבה. הנח מודל ריבית שנתי קבוע השווה ל- 5% .

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 13 "**.

בתא C2 נחשב את הריבית הרבעונית (נרשום: =1.05^0.25).

בעמודה C נרשום את סך הקצבה השנתית: בתא C8 נרשום A8*1000= , את תא C8 נעתיק לתאים C9-C27.

בעמודה D נציין ארבע פעמים את האינדקס הרץ של השנה (השנה הראשונה תצוין ארבע פעמים על ידי 1 , השנה השניה תצוין ארבע פעמים על ידי 2 וכך הלאה).

בתא D8 נרשום 1+ **INT(A7/4)**= (**INT(x)פונקציה הנותנת את הערך השלם של המספר x**), את התא D8 נעתיק לתאים D9-D87. התאים D8-D87 מציינים את שנת התשלום.

בעמודה E נרשום את הקצבאות המשולמות מידי רבעון: בתא E8 נרשום:

Lookup(D8,$A$8:$A$27,$C$8:$C$27)/4= . את התא E8 נעתיק את התא לתאים E9-E87. התאים E8-E87 מתארים את התשלומים הרבעוניים המתאימים.

הסבר על פונקצית ה- lookup:

התאים A8-A27 ביחד עם התאים C8-C27 מתארים את פונקצית ערכי התשלומים השנתיים: בתאים A8-A27 מופיעים ערכי הארגומנט המתאימים ואילו בתאים C8-C27 מופיעים ערכי הפונקציה המתאימים לערכי הארגומנט. בשני המקומות האחרונים של פונקצית ה- Lookup אנו מגדירים את הפונקציה על ידי עמודת הארגומנטים ועמודת הערכים (במקרה שלנו $A$8:$A$27,$C$8:$C$27). במקום הראשון אנו רושמים את האגגומנט בו אנו מעוניינים לחשב את הפונקציה (במקרה שלנו D8 או כל אחד התאים שבין D8-D87). לכן בעזרת פונקצית ה- Lookup אנו מקבלים את התשלומים הרבעוניים משך עשרים השנה.

בעמודה F נרשום את ערכי תשלומי הקצבאות הרבעוניות מהוונות לראשית. בתא F8 נרשום: E8*$BT$2^-A7, נעתיק את התא לתאים F9-F87.

על מנת לקבל את ערך הקצבה נסכם את התאים בתא F4 ונרשום: sum(F8:F88)= .

הערה:

המטרה האחרונה בפרק זה הוא להציג שני מדדים לתשואה ממוצעת שנתית של תזרים מזומנים לתקופה $[t_0, t_n]$.

הגדרה:

יהי $(C_1,t_1),\ (C_2,t_2),\dots$ תזרים מזומנים ותהי i_r התשואה שהשיג התזרים במרווח הזמן $[t_{r-1},t_r]$ ‏ $r=1,\dots,n$. אז **שעור התשואה הפנימית** (שת"פ) **צמוד הזמן** i במרווח הזמן $[t_0,t_n]$ נתון על ידי:

$$(1+i)^{t_n-t_0}=\prod_{r=1}^{n}(1+i_r)^{t_r-t_{r-1}}$$

או באופן שקול:

$$i=\left[\prod_{r=1}^{n}(1+i_r)^{t_r-t_{r-1}}\right]^{\frac{1}{t_n-t_0}}-1$$

דוגמה 14:

מאזן קרן שאינה חיבת במיסים בשנים 1980-1985 מכיל, בין היתר, את הנתונים הבאים:

שנה קלנדרית k	F(k)	J(k)
1980	86,932	7,703
1981	91,781	8,189
1982	96,316	8,613
1983	100,837	9,256
1984	105,054	9,371
1985	109,688	

כאשר: F(k) מציין את מאזן הקרן ב- 1.1 של השנה ה- k ו J_k מציין את הכנסה מריבית משך השנה ה- k. $k=1980,\ldots,1985$.

בהנחה שבכל שנה הריבית קבועה חשב:

(א) את הריבית בשנה ה- k, $k=1980,\ldots,1984$ (אותה נסמן ב- i_k)

(ב) את השת"פ צמוד הזמן.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 14 "**.

מידי שנה זוכה הקרן בתרומות חדשות. ערך התרומות בשנה ה- k שווה ל: $F(k+1)-F(k)-J(k)$ עבור $k=1980,\ldots,1984$.

נניח שהתרומות מתקבלות באמצע השנה ונקרב את $\sqrt{1+i}$ על ידי $1+\frac{i}{2}$. לכן בשנה ה- k, $k=1980,\ldots,1984$, נקבל את המשוואה הבאה:

$$F(k)\cdot(1+i_k)+[F(k+1)-F(k)-J(k)]\cdot\sqrt{1+i_k}=F(k+1).$$

או בקרוב את המשוואה הבאה:

$$F(k)\cdot(1+i_k)+[F(k+1)-F(k)-J(k)]\cdot(1+\frac{i_k}{2})=F(k+1).$$

מכאן נקבל ש: $i_k\approx\frac{2\cdot J(k)}{F(k)+F(k-1)-J(k)}$, $k=1980,\ldots,1984$

בתאים A7-A12 נציג את השנים הרלוונטיות בתאים B7-B12 נציג את ערכי F(k) ובתאים C7-C12 נציג את ערכי J(k).

(א)

בתאים D7-D12 נציג את הערכים המקורבים של i_k. בתא D7 נרשום: =2*C7/(B8+B7-C7)

ונעתיק את התא D7 לתאים D8-D11.

אלטרנטיבית:

בתאים E7-E11 ננקוב בערכי ריבית שנתיים שרירותיים (למשל נרשום בכל אחד מהתאים האלו 0.05). בתאים F7-F11 נציג את ערך משוואת הערך המדויקת לפי הריבית הנקובה בתא המתאים בעמודה E. בתא F7 נרשום:

=B7*(1+E7)+(B8-B7-C7)*(1+E7)^0.5-B8 ונעתיק את התא לתאים F8-F11.

בעזרת חתירה למטרה נחשב את הערכים בתאים E7-E11 המאפסים את הערכים המתאימים בתאים F7-F11. לדוגמה החישוב של תא E7: נבחר בחתירה למטרה את **התא**: F7 **לערך**: 0 **על ידי שינוי התא**: E7 ונאשר את הפעולה ונקבל בתא E7 את הריבית המתאימה. נחזור על פעולה זו על ידי מאקרו או על ידי חזרה פשוטה ונקבל את כל הריביות הדרושות.

הערה:

נשים לב שההבדל בין שני הפתרונים הוא רק בעשיריות הפרומיל.

(ב)

בתאים H7-H11 ובתאים I7-I11 נציג את הריבית השנתית בתוספת 1. בתאים H3 ו I3 נחשב את השת"פ צמוד הזמן ונרשום: =Product(H7:H11)^0.2-1, =Product(I7:I11)^0.2-1 בהתאמה.

הערה:

פונקצית ה- **Product** מכפילה את הערכים שבטווח התאים הרשום (במקרה שלנו H7:H11 ו I7:I11).

הגדרה:

יהי $(C_1,t_1),\ (C_2,t_2),\ldots$ תזרים מזומנים ויהי **F(t)** ערך תזרים המזומנים בזמן t, $t\geq 0$. אז

שעור התשואה הפנימית (שת"פ) **צמוד התזרים** i במרווח הזמן $[t_0,t_n]$ נתון במשוואה הבאה:

$$F(t_n)=\sum_r C_r\cdot(1+i)^{t_r-t_0}$$

דוגמה 15:

מאזן קרן שאינה חיבת במיסים בשנים 1980-1985 נתון בדוגמה 14. חשב עבור הקרן את התשואה הפנימית צמודת תזרים.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 15 "**.

מידי שנה זוכה הקרן בתרומות חדשות. ערך התרומות נטו בשנה ה- k שווה ל:

$.C(k)=F(k+1)-F(k)-J(k),\ \ k=1980,\ldots,1984$

עמודות A, B ו C זהות לעמודות אלו בדוגמה 14. בתא D7 נציג את F(1980) ובתאים D8-D12 נציג את C(1980)…C(1985), בהתאמה. בתא D8 נרשום: =B7-B8-C7 ונעתיק את התא לתאים D9-D12.

לצורך פישוט החישוב נניח שהתוספות השנתיות נתנו באמצע השנה. בתא E1 נקוב בריבית שנתית שרירותית בתאים E7-E12 נציג את ערך התזרים לפי הריבית הנקובה בתא E1 מחושב ב- 1.1.1985.

בתא E7 נרשום: =D7*\$E\$2^(1985-A7),

בתא E8 נרשום: =D8*\$E\$2^(1985-A8+0.5) ונעתיק את התא לתאים E9-E12, בתא E6 נציג את ערך התזרים מחושב לפי הריבית השרירותית ונרשום: =sum(E7:E12) ובתא E5 נציג את F(185) פחות ערך התזרים ונרשום: B12-E6

בעזרת חתירה למטרה נחשב את הערך הנכון של התשואה הפנימית צמודת התזרים: את **התא**: E5 **לערך**: 0 **על ידי שינוי התא**: E1 ונאשר את הפעולה ונקבל בתא E1 את הריבית המתאימה.

הגדרה:

יהי $(C_1, t_1),\ (C_2, t_2), \ldots$ תזרים מזומנים, ותהי i הריבית הנשתית במודל ריבית קבועה. אז

הזמן הממוצע המשוקלל של התזרים נתון על ידי: $\dfrac{\sum_r t_r \cdot C_r \cdot (1+i)^{-t_r}}{\sum_r C_r \cdot (1+i)^{-t_r}}$.

דוגמה 16:

בעל מכרה מעריך את תזרים המזומנים מפעילות כריה במכרה באופן הבא:

זמן	1	2	3	4	5
C(k)	500,000	400,000	300,000	200,000	100,000

חשב את הזמן הממוצע המשוקלל של התזרים במודל ריבית שנתית קבוע בו הריבית שווה

ל- $1\%, 2\%, \ldots, 10\%$.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 16 "**.

בתאים A7-A11 נציג את הזמנים בשנים, ובתאים B7-B11 נציג את ערכי C(k), $k = 1, \ldots, 5$,

בתא A1 נקוב בריבית שרירותית, ובתא B1 נרשום: =1+A1/100

בתאים C7-C11 נציג את ערכי התזרים המהוון לראשית ביחס לריבית השרירותית שבתא A1. בתא

C7 נרשום: =B7*$B$1^-A7 ונעתיק את התא לתאים C8:C11.

בתא C6 נציג את ערך התזרים המהוון לראשית ביחס לריבית השרירותית שבתאA1 ונרשום:

=sum(C7:C11) .

בתאים D7-D11 נציג את ערכי התזרים המשוקלל בזמן מהוון לראשית ביחס לריבית השרירותית

שבתא A1. בתא D7 נרשום: =A7*B7*$B$1^-A7 ונעתיק את התא לתאים D8:D11.

בתא D6 נציג את ערך התזרים המשוקלל בזמן המהוון לראשית ביחס לריבית השרירותית שבתא A1.

ונרשום: =sum(D7:D11)

בתא D1 נציג את הזמן הממוצע המשוקלל של התזרים ביחס לריבית השרירותית שבתא A1 ונרשום:

D6/C6

על מנת למצוא את הזמן הממוצע המשוקלל של התזרים ביחס לריביות השונות נשתמש במאקרו.

בתאים F7-F16 נרשום את הריביות הנדרשות (מ 1% ועד 10%),

הקלטת המאקרו:

(a) בסרגל הכלים נבחר Macro, ב- Macro נבחר Record New Macro ונאשר את הפעולה. כעת אנו מוכנים להקליט את Macro 4:

(b) את התא F7 נעתיק (העתקת ערך) לתא A1,

(c) את התא D1 העתיק (העתקת ערך) לתא G7,

(d) בסרגל הכלים נבחר Macro, ב- Macro ונבחר **Stop Recording**, על ידי בחירה זו הפסקנו את הקלטת המאקרו.

בסרגל הכלים נבחר Macro, ב- Macro נבחר Macros, נצבע את Macro 4 ונלחץ על Edit ונקבל את הטקסט הבא:

```
'
' Macro4 Macro
' Macro recorded 31/07/2003 by Langberg Naftali
    Range("F7").Select
    Selection.Copy
    Range("A1").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:= _
        False, Transpose:=False
```

```
    Range("D1").Select
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.Copy
    Range("G7").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:= _
        False, Transpose:=False
End Sub
```

על מנת להתאים את הטקסט למטרתנו נעשה בו את השינויים הבאים:

בשורה מעל .Range("F7") נרשום: For Index = 7 To 16,

במקום .Range("F7") נרשום: .Range("F" & Index),

במקום .Range("G7") (שורה שלישית מהסוף) נרשום: .Range("G" & Index),

בין שתי השורות האחרונות נוסיף שורה ונרשום: Next Index,

לסיום נלחץ בסרגל על הריבוע הכחול (Reset) ואחר כך נלחץ בסרגל על המשולש הכחול (Run) ונקבל בתאים G7-G16 את התשואות השנתיות המתאימות.

בסרגל הכלים נבחר Macro, ב- Macro נבחר Macros, נצבע את Macro 4 ונלחץ על Edit ונקבל את הטקסט אחר התיקונים. הטקסט נראה באופן הבא:

```
' Macro4 Macro
' Macro recorded 31/07/2003 by Langberg Naftali
For Index = 7 To 16
    Range("F" & Index).Select
    Selection.Copy
    Range("A1").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:= _
```

```
        False, Transpose:=False
    Range("D1").Select
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.Copy
    Range("G" & Index).Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:= _
        False, Transpose:=False
Next Index
End Sub
```

דוגמה 17:

לפני 10 שנים נרכשה קצבה חודשית המשולמת בפיגור משך 25 שנה. הקצבה החודשית בשנה ה- k שווה ל- $\frac{1,000 \cdot k}{12}$, $k = 1,\ldots,25$.

(א) חשב את הזמן הממוצע המשוקלל בשנים של הקצבה במודל ריבית שנתית קבוע בו הריבית שווה ל- $1\%, 2\%,\ldots,10\%$,

(ב) חשב את שארית הזמן הממוצע המשוקלל בשנים של יתרת הקצבה במודל ריבית שנתית קבוע בו הריבית שווה ל- $1\%, 2\%,\ldots,10\%$.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 2"** בגיליון בשם **"דוגמה 17 "**.

בתאים A7-A307 נציג את זמני התשלומים החודשיים (מזמן 0 ועד זמן 300).

בתאים B8-B307 נציג את השנים בהם שולמו הקצבאות החודשיות. בתא B8 נרשום:

=Int(A7/12)+1 ונעתיק את התא לתאים B9-B307, (int(x) מציג את הערך השלם של x).

בתאים C8-C307 נציג את גובה תשלומי הקצבה. בתא C8 נרשום: 1000*B8/12= ונעתיק את התא לתאים C9-C307.

(א)

בתא A1 ננקוב בריבית שנתית שרירותית ובתא B1 נציג את הריבית החודשית השקולה.

בתאים D8-D307 נציג את ערכי ההחזרים המשוקללים מהוונים לראשית לפי הריבית השרירותית הנקובה ב- A1. בתא D8 נרשום: A8*C8*$B$1^-A8= ונעתיק את התא לתאים D9-D307. בתא D4 נציג את ערך התזרים המשוקלל המהוון לראשית לפי הריבית השרירותית הנקובה ב- A1 .

בתאים E8-E307 נציג את ערכי ההחזרים מהוונים לראשית לפי הריבית השרירותית הנקובה ב- A1. בתא E8 נרשום: C8*$B$1^-A8= ונעתיק את התא לתאים D9-D307. בתא E4 נציג את ערך התזרים המשוקלל המהוון לראשית לפי הריבית השרירותית הנקובה ב- A1 .

בתא E1 נציג את הזמן הממוצע המשוקלל של הקצבה בשנים לפי הריבית השרירותית הנקובה ב- A1 ונרשום: D4/E4 /12=.

על מנת למצוא את הזמן הממוצע המשוקלל של התזרים ביחס לריביות השונות נשתמש במאקרו.

בתאים G8-G17 נרשום את הריביות הנדרשות (מ 1% ועד 10%),

הקלטת המאקרו:

(a) בסרגל הכלים נבחר Macro, ב- Macro נבחר Record New Macro ונאשר את הפעולה.

כעת אנו מוכנים להקליט את Macro 5:

(b) את התא G8 נעתיק (העתקת ערך) לתא A1,

(c) את התא E1 העתיק (העתקת ערך) לתא H8,

(d) בסרגל הכלים נבחר Macro, ב- Macro ונבחר **Stop Recording**, על ידי בחירה זו הפסקנו את הקלטת המאקרו.

בסרגל הכלים נבחר Macro, ב- Macro נבחר Macros, נצבע את Macro 5

ונלחץ על Edit ונקבל את הטקסט הבא:

```
Sub Macro5()
 Macro5 Macro
' Macro recorded 31/07/2003 by Langberg Naftali
   Range("G8" & ).Select
   Selection.Copy
   Range("A1").Select
   Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:= _
      False, Transpose:=False
   Range("E1").Select
   Application.CutCopyMode = False
   Selection.Copy
   Range("H8").Select
   Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:= _
      False, Transpose:=False
End Sub
```

על מנת להתאים את הטקסט למטרתנו נעשה בו את השינויים הבאים:

בשורה מעל .("Range("G8 נרשום: For Index = 8 To 17,

במקום .("Range("G8 נרשום: .(Range("G" & Index,

במקום .("Range("H8 (שורה שלישית מהסוף) נרשום: .(Range("H" & Index,

בין שתי השורות האחרונות נוסיף שורה ונרשום: Next Index,

לסיום נלחץ בסרגל על הריבוע הכחול (Reset) ואחר כך נלחץ בסרגל על המשולש הכחול (Run) ונקבל בתאים H8-H17 את התשואות השנתיות המתאימות.

בסרגל הכלים נבחר Macro, ב- Macro נבחר Macros, נצבע את Macro 4 ונלחץ על Edit ונקבל את הטקסט אחר התיקונים. הטקסט נראה באופן הבא:

```
Sub Macro5()
' Macro5 Macro
' Macro recorded 31/07/2003 by Langberg Naftali
For Index = 8 To 17
   Range("G" & Index).Select
   Selection.Copy
   Range("A1").Select
   Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:= _
      False, Transpose:=False
   Range("E1").Select
   Application.CutCopyMode = False
   Selection.Copy
   Range("H" & Index).Select
   Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:= _
      False, Transpose:=False
Next Index
End Sub
```

(ב)

בתא J2 ננקוב בריבית שנתית שרירותית ובתא K2 נציג את הריבית החודשית השקולה.

בתאים J128-J307 נציג את יתרת ערכי ההחזרים המשוקללים מהוונים לראשית לפי הריבית השרירותית הנקובה ב- J2. בתא J128 נרשום: =A128*C128*$K$2^-A128 ונעתיק את התא לתאים J129-J307. בתא J6 נציג את ערך התזרים המשוקלל המהוון לראשית לפי הריבית השרירותית הנקובה ב- J2.

בתאים K128-K307 נציג את יתרת ערכי ההחזרים מהוונים לראשית לפי הריבית השרירותית הנקובה ב- J2. בתא K128 נרשום: =C128*$K$2^-A128 ונעתיק את התא לתאים K129-K307. בתא K6 נציג את ערך התזרים המהוון לראשית לפי הריבית השרירותית הנקובה ב- J2 ונרשום: =sum(K128:K307).

בתא K1 נציג את הזמן הממוצע המשוקלל של הקצבה לפי הריבית השרירותית הנקובה ב- J2 ונרשום: =j6/K6/12-10.

על מנת למצוא את הזמן הממוצע המשוקלל של התזרים ביחס לריביות השונות נשתמש במאקרו.

בתאים N8-N17 נרשום את הריביות הנדרשות (מ 1% ועד 10%),

הקלטת המאקרו:

(a) בסרגל הכלים נבחר Macro, ב- Macro נבחר Record New Macro ונאשר את הפעולה. כעת אנו מוכנים להקליט את Macro 6:

(b) את התא M8 נעתיק (העתקת ערך) לתא J2,

(c) את התא K1 העתיק (העתקת ערך) לתא N8,

(d) בסרגל הכלים נבחר Macro, ב- Macro ונבחר **Stop Recording**, על ידי בחירה זו הפסקנו את הקלטת המאקרו.

בסרגל הכלים נבחר Macro, ב- Macro נבחר Macros, נצבע את Macro 6 ונלחץ על Edit ונקבל את הטקסט הבא:

```
Sub Macro6()
' Macro6 Macro
```

```
' Macro recorded 13/09/2003 by Langberg Naftali
    Range("M8" ).Select
    Selection.Copy
    ActiveWindow.Panes(1).Activate
    Range("J2").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:= _
        False, Transpose:=False
    Range("K1").Select
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.Copy
    ActiveWindow.Panes(3).Activate
    Range("N8").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:= _
        False, Transpose:=False
End Sub
```

על מנת להתאים את הטקסט למטרתנו נעשה בו את השינויים הבאים:

בשורה מעל .Range("M8") נרשום: For Index = 8 To 17,

במקום .Range("M8") נרשום: .Range("M" & Index),

במקום .Range("N8") (שורה שלישית מהסוף) נרשום: .Range("N" & Index),

בין שתי השורות האחרונות נוסיף שורה ונרשום: Next Index,

לסיום נלחץ בסרגל על הריבוע הכחול (Reset) ואחר כך נלחץ בסרגל על המשולש הכחול (Run) ונקבל בתאים N8-N17 את התשואות השנתיות המתאימות.

בסרגל הכלים נבחר Macro, ב- Macro נבחר Macros, נצבע את Macro 6 ונלחץ על Edit

ונקבל את הטקסט אחר התיקונים. הטקסט נראה באופן הבא:

```
Sub Macro6()
' Macro6 Macro
' Macro recorded 13/09/2003 by Langberg Naftali
For Index = 8 To 17
   Range("M" & Index).Select
   Selection.Copy
   ActiveWindow.Panes(1).Activate
   Range("J2").Select
   Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:= _
      False, Transpose:=False
   Range("K1").Select
   Application.CutCopyMode = False
   Selection.Copy
   ActiveWindow.Panes(3).Activate
   Range("N" & Index).Select
   Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:= _
      False, Transpose:=False
Next Index
End Sub
```