פרופ' נפתלי לנגברג

פוליסות

בעזרת מ.מ. הבדיד K המתאר את שארית אורך חיי נפש נציג בסעיף זה את האלמנטים הבאים של

פוליסת ביטוח שרכשה הנפש:

(1) תזרים תשלומי קצבה (או ה**פרמיות**) על ידי הנפש,

(2) הטבת מוות המיקרית המשולמת למוטבי הנפש,

(3) הטבת שרידות המשולמת לנפש

(4) הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח.

סימונים:

תהי **i** הריבית ליחידת זמן, יהי **v** מקדם ההפחתה המתאים לריבית i ($v \equiv \frac{1}{1+i}$), $d \equiv i \cdot v = 1 - v$,

ועבור מספר שלם אי שלילי n יהי $Z_n = \sum_{r=0}^{n} v^r$.

נסביר ונחשב בהמשך את כל אחד מארבעת המושגים שהזכרנו.

תשלומי קצבה לנפש:

נניח שנפש בת 40 מקבלת ממוסד ביטוחי קצבה שנתית מ**ראש** (תשלום ראשון בגיל 40)

בגובה 1 ₪ כל עוד היא חיה. יהי K המ.מ. הבדיד המתאר את שארית אורך חיי הנפש.

הנפש מקבלת **K+1** תשלומים כל אחד בגובה 1 ₪ בזמנים $0,1,\ldots,K$. ערך תזרים הקצבה

המיקרי מחושב בעת התשלום הראשון של הקצבה שווה ל:

$$Z_K = \sum_{r=0}^{K} v^r$$

מהקורס במתמטיקה של המימון או בעזרת הנוסחה של טור גיאומטרי סופי נקבל ש:

$$\sum_{r=0}^{K} v^r = \frac{1 - v^{K+1}}{d}$$

ערך תזרים הקצבה המיקרי מחושב בעת תשלום הקצבה הראשון הוא פונקציה של המ.מ.

K ולכן הוא בעצמו מ.מ. ב**דוגמה ג-01** נחשב את:

ערכי תזרים הקצבה,

תוחלת תזרים הקצבה,

שונות תזרים הקצבה.

דוגמה ג-01

הצגת המ.מ. K בקובץ אקסל בשם **"דוגמה ג-01"**

בעמודה **A** אנו מציגים את ערכי המ.מ. K,

בעמודה **B** אנו מציגים את ההסתברויות המתאימות של ערכי המ.מ. K.

בעמודה **C** אנו מציגים את ערכי פונקצית השרידות המתאימים של המ.מ.K.

בתא **E9** אנו מציגים את תוחלת המ.מ. K.

בתא **F9** אנו מציגים את תוחלת המ.מ.K בעזרת הנוסחה האלטרנטיבית.

בתא **H9** אנו מציגים את שונות המ.מ. K.

בתא **I9** אנו מציגים את המומנט השני של המ.מ. K.

בתא **J9** אנו מציגים את שונות המ.מ. K בעזרת נוסחת החישוב האלטרנטיבית.

הצגת ערכי תזרים הקצבה המיקרי:

(א) בעמודה **L** נציג את ערכי פונקצית ההיוון השנתית v^r, $r = 0,1,\ldots,$ (**עמודת עזר**).

(ב) בעמודה **M** נציג את ערכי תזרים הקצבה על ידי יצירת הסכומים החלקיים

המתאימים הנתונים בנוסחה: $\sum_{r=0}^{K} v^r$

(ג) בעמודה **N** נציג **אלטרנטיבית** את ערכי תזרים הקצבה על ידי שימוש בנוסחה:

$$\frac{1 - v^{K+1}}{d}$$

פרופ' נפתלי לנגברג

חישוב תוחלת תזרים הקצבה המיקרי (סימון: $\ddot{a}_{40}$)

(א) על פי הגדרת התוחלת נקבל ש:

$$\ddot{a}_{40} = \sum_{r=0}^{70} P(K=r)\cdot Z_r$$

(ב) בעמודה **O** אנו מציגים את מכפלות הערכים של תזרים הקצבה בהסתברויות המתאימות של המ.מ. K ובתא O9 אנו מציגים את תוחלת תזרים הקצבה,

(ג) הפעולות המתמטיות הבאות נותנות הצגה נוספת ומוכרת לתוחלת תזרים הקצבה.

$$\sum_{r=0}^{\infty} P(K=r)\cdot Z_r = \sum_{r=0}^{\infty} [P(K\ge r)-P(K\ge r+1)]\cdot Z_r = \sum_{r=0}^{\infty} [P(K\ge r)\cdot Z_r - \sum_{r=0}^{\infty} [P(K\ge r+1)\cdot Z_r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} P(K\ge r)\cdot Z_r - \sum_{r=1}^{\infty} P(K\ge r)\cdot Z_{r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} P(K\ge r)\cdot Z_r - \sum_{r=1}^{\infty} P(K\ge r)\cdot [Z_r - v^r] =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} P(K\ge r)\cdot Z_r - \sum_{r=1}^{\infty} P(K\ge r)\cdot Z_r + \sum_{r=1}^{\infty} P(K\ge r)\cdot v^r = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} P(K\ge r)\cdot v^r = \sum_{r=0}^{\infty} P(K\ge r)\cdot v^r$$

מכאן אנו מקבלים את הנוסחה הידועה:

$$= \sum_{r=0}^{\infty} P(K\ge r)\cdot v^r = \sum_{r=0}^{70} P(K\ge r)\cdot v^r \; \ddot{a}_{40}$$

(ד) בתא **P9** חשבנו את תוחלת תזרים הקצבה בעזרת הנוסחה $\sum_{r=0}^{70} P(K\ge r)\cdot v^r$.

חישוב שונות תזרים הקצבה המיקרי

(א) בעמודה **R** אנו מציגים את מכפלות הסתברויות של ערך הקצבה המיקרי בריבוע הפרש מתוחלת ערך הקצבה. בתא **R9** אנו מציגים את שונות ערך הקצבה המיקרי,

(ב) על מנת להשתמש בנוסחת החישוב לקבל את שונות ערך הקצבה המיקרי אנו זקוקים לחישוב המומנט השני ערך הקצבה המיקרי. בתא **S9** אנו מציגים את

פרופ' נפתלי לנגברג

המומנט השני של ערך הקצבה המיקרי. בתא **T9** אנו מציגים את החישוב

האלטרנטיבי של שונות ערך הקצבה המיקרי.

(ד) ערך הקצבה שווה ל: $\frac{1-v^{K+1}}{d}$. נשתמש בעבודה זו להציג דרכים נוספות

לחישוב השונות של ערך הקצבה המיקרי. על סמך תכונות השונות נקבל ש:

$$Var[\frac{1-v^{K+1}}{d}] = \frac{1}{d^2} \cdot Var[1-v^{K+1}] = \frac{1}{d^2} \cdot Var[v^{K+1}]$$

לכן שונות ערך הקצבה המקרית נתונה על ידי כל אחת משתי הנוסחאות הבאות:

נוסחה I:

$$\frac{1}{d^2} \cdot E[v^{K+1} - Ev^{K+1}]^2$$

נוסחה II:

$$\frac{1}{d^2} \cdot (Ev^{2 \cdot K+2} - [Ev^{K+1}]^2)$$

בתאים **U9** ו **V9** חשבנו את שונות הקצבה המקרית בעזרת שתי הנוסחאות

שזה עתה הצגנו.

הערה:

בעזרת תכונות פונקצית התוחלת נקבל ש:

$$\ddot{a}_{40} = E\frac{1-v^{K+1}}{d} = \frac{1-Ev^{K+1}}{d}$$

בתא **Q9** נציג, בעזרת הנוסחה האחרונה, חישוב אלטרנטיבי נוסף של התוחלת.

ערך הטבת המוות למוטבים של הנפש:

יהי K המ.מ. הבדיד המתאר את שארית אורך חיי נפש בת 40. בסוף שנת מותה של הנפש,

פרופ' נפתלי לנגברג

בזמן K+1 הנמדד מגיל 40 של הנפש, מקבלים המוטבים של הנפש הטבת מוות בגובה 1 ₪.

ערך הטבת המוות המקרית מחושבת בעת שהנפש הייתה בת 40 הוא מ.מ. השווה ל:

$$v^{K+1}.$$

נמשיך בפיתוח **דוגמה ג-01** ונחשב את:

ערכי הטבת המוות המיקרית,

תוחלת הטבת המוות המיקרית,

שונות הטבת המוות המיקרית.

הצגת ערכי הטבת המוות המיקרית

בעמודה **O** אנו מציגים את ערכי הטבת המוות המיקרית.

חישוב תוחלת הטבת המוות המיקרית (סימון: $(A_{40}$

בתא **X9** אנו מציגים את תוחלת הטבת המוות המקרית

הערה:

מאחר ו

$$\ddot{a}_{40} = E\frac{1-v^{K+1}}{d} = \frac{1-Ev^{K+1}}{d} = \frac{1-A_{40}}{d}$$

מתקבל השוויון הידוע הבא:

$$1-d\cdot\ddot{a}_{40} = A_{40}$$

בתא **Y9** נציג את תוחלת הטבת המוות המקרית בעזרת הקשר

$$1-d\cdot\ddot{a}_{40} = A_{40}.$$

חישוב שונות הטבת המוות המיקרית

בעזרת הגדרת השונות ובעזרת נוסחת החישוב אנו מציגים בתאים **Z9** ו **AB9** את שונות הטבת המוות המקרית.

נשלב את האלמנטים הביטוחיים שהצגנו בסוגי פוליסות שונות. סוג הפוליסה הראשונה שנציג הוא

"פוליסה לכל החיים".

הצגת הפוליסה לכל החיים

חברת ביטוח מנפיקה לנפש בת ה- 40 את הפוליסה הבאה: החברה מתחייבת לשלם למוטבים של הנפש בסוף שנת מותה סכום בגובה 100,000 ₪ (תשלום נקרא **הטבת מוות**). בתמורה מתחייבת הנפש לשלם תשלומים שנתיים מראש (שהראשון בהם בגיל 40) כל עוד היא חיה בגובה 1,300 ₪ (תשלומים אלו נקראים **פרמיות**).

הרווח\ההפסד המיקרי של **חברת הביטוח** בפוליסה זו מחושב בעת תשלום הפרמיה הראשונה שווה ל:

1,300 ₪ מוכפלים בערך תזרים הפרמיה המיקרי מחושב בעת הנפקת הפוליסה פחות 100,000 ₪ מוכפלים בערך הטבת המוות המיקרית מחושבת בעת הנפקת הפוליסה. (ערך תזרים התשלומים שמשלמת הנפש פחות ערך ההטבה שמשלמת חברת הביטוח).

הערות:

(א) הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח מחושב בעת תשלום הפרמיה הראשון שווה ל:

$$1{,}300 \cdot Z_K - 100{,}000 \cdot v^{K+1}$$

(ב) נחשב עתה ב**דוגמה ג-01** את:

ערכי הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח,

תוחלת הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח,

שונות הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח.

הצגת ערכי הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח

בעמודה **AD** נציג את ערכי הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח,

חישוב תוחלת הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח:

פרופ' נפתלי לנגברג

בעמודה **AE** נציג את ערכי הרווח\הפסד מוכפל בהסתברויות המתאימות ובתא **AE9** נציג את תוחלת הרווח\הפסד של חברת הביטוח מחושב בעת ההנפקה.

הערות:

(א) מתכונות התוחלת נובע שתוחלת הרווח\הפסד של חברת הביטוח שווה ל:

$$1{,}300\cdot \ddot{a}_{40}-100{,}000\cdot A_{40}$$

לכן על מנת לחשב את תוחלת הרווח\הפסד של חברת ביטוח,ניתן להשתמש בחישובי התוחלת של תזרים הפרמיות המיקרי ושל הטבת מוות המקרית. בתא **AF9** נציג את תוחלת הרווח\ההפסד של חברת הביטוח.

(ב) מאחר ומתקיים $1-d\cdot\ddot{a}_{40}=A_{40}$ ניתן לרשום את תוחלת הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח באופן הבא:

$$1{,}300\cdot \ddot{a}_{40}-100{,}000\cdot A_{40}=1{,}300\cdot \ddot{a}_{40}-100{,}000\cdot(1-d\cdot\ddot{a}_{40})=$$

$$(100{,}000\cdot d+1{,}300)\cdot\ddot{a}_{40}-100{,}000$$

בתא **AG9** נציג חישוב אלטרנטיבי לתוחלת הרווח\ההפסד של חברת הביטוח בעזרת הנוסחה שהתקבלה.

(ג) מאחר ומתקיים הקשר $\frac{1-v^{K+1}}{d}=\sum_{r=0}^{K}v^r=Z_K$ ניתן לרשום את הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח באופן הבא:

$$\frac{1{,}300}{d}-(100000+\frac{1{,}300}{d})\cdot v^{K+1}$$

בתא **AH9** נציג חישוב אלטרנטיבי לתוחלת הרווח\ההפסד של חברת הביטוח בעזרת הנוסחה שהתקבלה.

חישוב שונות הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח:

הערות:

(א) בתא **AI9** נציג את ערך השונות של הרווח\ההפסד של חברת הביטוח

(ב) בתא **AK9** נציג את ערך השונות של הרווח\הפסד של חברת הביטוח שהתקבלה

על ידי נוסחת החישוב.

(ג) מהזהות $1-d\cdot Z_K = v^{K+1}$ נובע שהרווח\הפסד מיקרי של חברת הביטוח

ניתן להצגה הבאה:

$$(100{,}000\cdot d+1{,}300)\cdot Z_K - 100{,}000$$

נשתמש בהצגה זו לחישוב אלטרנטיבי של שונות שהרווח\הפסד מיקרי של חברת

הביטוח. מתכונות פונקצית השונות נקבל ש:

$$\mathrm{Var}[(100{,}000\cdot d+1{,}300)\cdot Z_K - 100{,}000] = (100{,}000\cdot d+1{,}300)^2\cdot \mathrm{Var}(Z_K)$$

בתא **AM9** נציג את שונות הרווח\הפסד של חברת הביטוח מחושבת בעזרת

הנוסחה הנתונה.

(ד) מאחר וניתן לרשום את הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח באופן הבא:

$$\frac{1{,}300}{d} - (100000+\frac{1{,}300}{d})\cdot v^{K+1}$$

שונות הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח שווה ל:

$$.(100000+\frac{1{,}300}{d})^2\cdot \mathrm{Var}(v^{K+1})$$

בדוגמה הבאה נציג את האלמנטים השונים **בפוליסת ביטוח מעורבת**.

דוגמה ג-02:

שארית אורך החיים של נפש בת 30 בשנים שלמות מתוארת על ידי המ.מ.י K המ.מ.

הערות:

(א) בדוגמה זו נציג את אלמנטים הבאים של פוליסת ביטוח:

פרופ' נפתלי לנגברג

התזרים המיקרי של **תשלומי הפרמיות** לנפש,

הטבת מוות המשולמת למוטבי הנפש בזמן מיקרי,

הטבת השרידות המשולמת לנפש אם שרדה עד זמן הפירעון,

הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח לפוליסה זו.

(ב) על מנת להציג אלמנטים אלו אנו זקוקים למשתנה העזר המיקרי **M** המוגדר על ידי:

$$M = \min(K, 34)$$

הצגת המ.מ. M.

ערכי המ.מ. M:

המ.מ. הבדיד M מקבל את הערכים $0,1,\ldots,34$.(אם הנפש נפטרה בגיל 30 יקבל המ.מ. M את הערך 0 ואם הנפש נפטרה לאחר יום ההולדת ה- 64 שלה יקבל המ.מ. M את הערך 34.)

פונקצית ההסתברות של המ.מ. M:

הסתברויות המ.מ. M נתונות על ידי:

$$P(M = r) = \begin{cases} P(K = r) & , 0 \le r < 34 \\ P(K \ge 34) & , r = 34 \end{cases}$$

פונקצית השרידות של המ.מ. M:

ערכי פונקצית השרידות של המ.מ. M נתונים על ידי:

$$P(M \ge r) = \begin{cases} P(K \ge r) & , 0 \le r \le 34 \\ 0 & , r \ge 35 \end{cases}$$

חישובים: גיליון אקסל בשם "דוגמה ג-02"

הצגת המ.מ. K:

בעמודה **A** אנו מציגים את ערכי המ.מ. K. (מ- 0 ועד 80),

בעמודה **B** אנו מציגים את פונקצית השרידות של המ.מ. K,

בעמודה **C** אנו מציגים את ההסתברויות המתאימות של ערכי המ.מ.K.

הצגת המ.מ. M:

בעמודה **E** אנו מציגים את ערכי המ.מ. M. (מ- 0 ועד 34)

בעמודה **F** אנו מציגים את ההסתברויות המתאימות של ערכי המ.מ.M.

בעמודה **G** אנו מציגים את ערכי פונקצית השרידות של המ.מ. M.

נעבור עתה להצגת האלמנטים של פוליסת ביטוח.

תשלומי קצבה לנפש:

הנפש בת ה- 30 מקבלת ממוסד ביטוחי קצבה שנתית מ**ראש** (תשלום ראשון בגיל 30)

כל עוד היא חיה אך לכל היותר 35 תשלומים שנתיים כל תשלום בגובה 1 ₪.

מסקנות:

(א) הנפש מקבלת **M +1** תשלומים כל אחד בגובה 1 ₪ בזמנים $0,1,\ldots,M$.

(ב) ערך תזרים הקצבה המיקרי מחושב בעת תשלום הקצבה הראשון שווה ל:

$$Z_M = \sum_{r=0}^{M} v^r = \frac{1-v^{M+1}}{d}$$

הערות:

(א) בדומה לחישובי הקצבה בדוגמה ג-01 נציג בעמודות I-S

את **ערכי תזרים הקצבה**,

את **תוחלת תזרים הקצבה** (סימון: $\ddot{a}_{30:35}$)

ואת **שונות תזרים הקצבה**.

(ב) בדומה לפיתוח ב**דוגמה ג-01** נקבל ש:

$$\ddot{a}_{30:35} = \sum_{r=0}^{\infty} P(M=r)\cdot Z_r = \sum_{r=0}^{34} P(M=r)\cdot Z_r = \sum_{r=0}^{34} P(K \ge r)\cdot v^r$$

תשלום ההטבה (מוות או שרידות) על ידי חברת הביטוח:

אם הנפש נפטרת במרווח הגיל [30, 65] יקבלו המוטבים שלה בסוף שנת מותה

(בזמן M+1 הנמדד מגיל 30 של הנפש) **הטבת מוות** בגובה 1 ₪. בנוסף אם הנפש

שרדה את גיל 65 היא תקבל **הטבת שרידות** בגובה 1 ש"ח. ערך ההטבה המקרית

מחושב בעת שהנפש הייתה בת 30 הוא מ.מ. ושווה ל: v^{M+1}.

הערה:

בדומה לחישובי הטבת המוות ב**דוגמה ג-01** נציג בעמודות U-Y

את **תוחלת ההטבה** (סימון: $A_{30:35}$)

ואת **שונות ההטבה**.

הצגת פוליסה מעורבת

חברת ביטוח מנפיקה לנפש בת 30 פוליסה ל- 35 שנים. אם הנפש נפטרה במרווח הגיל [30, 65] מתחייבת החברה לשלם למוטבים של הנפש בסוף שנת מותה הטבת מוות בגובה 100,000 ₪. אם הנפש שרדה עד פירעון הפוליסה (כלומר שרדה עד גיל 65) מתחייבת החברה לשלם לנפש 100,000 ₪ (הנקראת **הטבת שרידות**). בתמורה מתחייבת הנפש לשלם לחברה תשלומים שנתיים מראש (שהראשון בהם בגיל 30) כל עוד היא חיה אך לכל היותר 35 תשלומים שנתיים. כל תשלום בגובה 1,400 ₪ (פרמיות)

הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח בפוליסה זו מחושב בעת תשלום הפרמיה הראשונה שווה ל:

1,400 ₪ מוכפלים בערך תזרים פרמיה מיקרי בגובה 1 ₪ מחושב בעת הנפקת הפוליסה פחות 100,000 ₪ מוכפלים בערך ההטבה בגובה 1 ₪ מחושבת בעת הנפקת הביטוח. (ערך תזרים התשלומים המשולם על ידי הנפש פחות ערך ההטבה המשולם על ידי חברת הביטוח).

הערות:

(א) הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח מחושב בעת תשלום הפרמיה הראשון שווה ל:

$$1{,}400 \cdot Z_M - 100{,}000 \cdot v^{M+1}$$

(ב) נחשב עתה את:

ערכי הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח,

תוחלת הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח,

ושונות של הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח.

הצגת ערכי הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח

בעמודה **AA** נציג את ערכי הרווח\הפסד,

חישוב התוחלת של הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח:

בעמודה **AB** נציג את ערכי הרווח\הפסד מוכפל בהסתברויות המתאימות ובתא AB6 נציג את תוחלת הרווח\הפסד של חברת הביטוח מחושב בעת ההנפקה.

חישוב השונות של הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח:

(א) בתא **AF6** נציג את ערך השונות של הרווח\ההפסד של חברת הביטוח

(ב) בתא **AH6** נציג את ערך השונות של הרווח\הפסד של חברת הביטוח שהתקבלה על ידי נוסחת החישוב האלטרנטיבית.

הערות:

(א) מתכונות התוחלת נובע שתוחלת הרווח\הפסד של חברת הביטוח שווה ל:

$$1{,}400\cdot \ddot{a}_{30:35} - 100{,}000\cdot A_{30:35}$$

לכן על מנת לחשב את תוחלת הרווח\הפסד של חברת ביטוח,ניתן להשתמש בחישובי התוחלת של ערך הקצבה המיקרי ושל הטבת מוות המקרית. בתא **AB6** נציג את תוחלת הרווח\ההפסד של חברת הביטוח.

(ב) מאחר ומתקיים הקשר $1-d\cdot\ddot{a}_{30:35}=A_{30:35}$ ניתן לרשום את תוחלת הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח באופן הבא:

$$1{,}400\cdot \ddot{a}_{30:35}-100{,}000\cdot A_{30:35}=1{,}400\cdot \ddot{a}_{30:35}-100{,}000\cdot(1-d\cdot \ddot{a}_{30:35})=$$

$$(100{,}000\cdot d+1{,}400)\cdot \ddot{a}_{30:35}-100{,}000$$

בתא **AC6** נציג חישוב אלטרנטיבי לתוחלת הרווח\ההפסד של חברת הביטוח בעזרת הנוסחה שהתקבלה.

(ג) מאחר ומתקיים הקשר $Z_M=\sum_{r=0}^{M} v^r=\frac{1-v^{M+1}}{d}$ ניתן לרשום את הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח באופן הבא:

$$\frac{1{,}400}{d}-(100000+\frac{1{,}400}{d})\cdot v^{M+1}$$

בתא **AD6** נציג חישוב אלטרנטיבי לתוחלת הרווח\ההפסד של חברת הביטוח בעזרת הנוסחה שהתקבלה.

(ד) מהזהות $1-d\cdot Z_M=v^{M+1}$ נובע שהרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח ניתן להצגה הבאה:

$$(100{,}000\cdot d+1{,}400)\cdot Z_M-100{,}000$$

נשתמש בהצגה זו לחישוב אלטרנטיבי של שונות הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח. מתכונות פונקצית השונות נקבל ש:

$$Var[(100{,}000\cdot d+1{,}400)\cdot Z_M-100{,}000]=(100{,}000\cdot d+1{,}400)^2\cdot Var(Z_m)$$

בתא **AH6** נציג את שונות הרווח\הפסד של חברת הביטוח מחושבת בעזרת הנוסחה הנתונה.

(ג) מאחר וניתן לרשום את הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח באופן הבא:

$$\frac{1{,}400}{d}-(100000+\frac{1{,}400}{d})\cdot v^{M+1}$$

שונות הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח שווה ל:

$$.(100000+\frac{1{,}400}{d})^{2}\cdot Var(v^{M+1})$$

בתא **AI6** נציג חישוב אלטרנטיבי לתוחלת הרווח\ההפסד של חברת הביטוח

בעזרת הנוסחה שהתקבלה.

דוגמה ג- 03 16:

יהי K המ.מ. המתאר את שארית מספר **החודשים** השלמים שתחיה נפש כיום בת 300 חודש.

המ.מ. K מקבל את הערכים $0,1,\ldots,1{,}151$. (אם הנפש נפטרה בחודש ה- 300 לחייה יקבל המ.מ. K

את הערך 0 ואם הנפש נפטרה בחודש ה- 1,451 יקבל המ.מ. K את הערך 1,151).

הערות:

(א) בעמודות A-J בגיליון הראשון בקובץ **"דוגמה ג-03"** נציג

את **ערכי** המ.מ. K,

את **פונקצית ההסתברות** של המ.מ. **K**,

את פונקצית ה**שרידות** של המ.מ. K,

את **תוחלת** המ.מ. K,

ואת **שונות** המ.מ. K.

(ב) בהמשך נציג את האלמנטים הבאים של פוליסת ביטוח:

את התזרים מיקרי של **תשלומי קצבה** לנפש,

את **הטבת מוות** המשולמת למוטבי הנפש בזמן מיקרי

ואת **הרווח\ההפסד** המיקרי של חברת הביטוח לפוליסה זו.

(ג) על מנת להציג א אלמנטים אלו אנו זקוקים למשתנה עזר M המוגדר על ידי:

$$M=\min(K,479)$$

המ.מ. הבדיד M מקבל את הערכים $0,1,\ldots,479$,

(ד) בעמודות L-N בגיליון **"דוגמה ג-03"** נציג

את **ערכי** המ.מ. M,

את **ההסתברויות** המתאימות לערכים אלו,

את פונקצית ה**שרידות** של המ.מ. M,

נעבור עתה להצגת אלמנטים של פוליסת הביטוח

תשלומי קצבה לנפש:

הנפש בת 300 חודש מקבלת קצבה חודשית **מראש** (תשלום ראשון בגיל החודשי 300)

בגובה 1 ₪ כל עוד היא חיה אך לכל היותר 480 תשלומים חודשיים.

לכן הנפש מקבלת **M+1** תשלומים חודשיים כל אחד בגובה 1 ₪ בזמנים $0,1,\ldots,M$.

ערך תזרים הקצבה המיקרי מחושב בעת תשלום הקצבה הראשון שווה ל:

$$Z_M = \sum_{r=0}^{M} v^r = \frac{1-v^{M+1}}{d}$$

הערות:

(א) בדומה לחישובים בדוגמה ג-02 נציג בעמודות P-W בגיליון "**דוגמה ג-03**"

את **ערכי** תזרים הקצבה

את **תוחלת** תזרים הקצבה (סימון: $\ddot{a}_{300:480}$)

ואת **שונות** תזרים הקצבה

תשלום הטבת מוות למוטבים של הנפש:

אם הנפש נפטרה במרווח הגיל [300,780) יקבלו המוטבים שלה בסוף חודש מותה

(בזמן K+1 הנמדד מגיל 300 של הנפש) **הטבת מוות** בגובה 1 ₪. ערך הטבת המוות

המיקרית מחושבת בעת שהנפש הייתה בת 300 חודש הוא מ.מ. ושווה ל:

פרופ' נפתלי לנגברג

$$\begin{cases} v^{K+1}, & K < 480 \\ 0, & K \geq 480 \end{cases}$$

הערה:

בדומה לחישובי ההטבה בדוגמה ג-02 נציג בעמודות Y-AB בגיליון **"דוגמה ג-03"**

את **תוחלת** הטבת המוות (סימון: $A^{1}_{300:480}$)

ואת **שונות** הטבת המוות.

הצגת פוליסה (פוליסה זמנית)

חברת ביטוח מנפיקה לנפש בת 300 פוליסה ל- 480 חודש. אם הנפש נפטרה במרווח הגיל [300, 780] מתחייבת החברה לשלם למוטבים של הנפש בסוף חודש מותה הטבת מוות בגובה 100,000 ₪. בתמורה מתחייבת הנפש לשלם לחברה תשלומים חודשיים מראש (שהראשון בהם בגיל 300 חודש) בגובה 120₪ כל עוד היא חיה אך לכל היותר 432 פרמיות. **הרווח\ההפסד** המיקרי של חברת הביטוח על הסכם זה מחושב בעת תשלום הפרמיה הראשונה שווה ל:

120 ₪ מוכפלים בערך תזרים הקצבה המיקרי בגובה 1 ₪ מחושב בעת הנפקת הפוליסה פחות 100,000 ₪ מוכפל בערך הטבת המוות בגובה 1 ₪ מחושבת בעת הנפקת הפוליסה.

הערות:

(א) משתנה הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח מחושב בעת תשלום הפרמיה הראשון שווה ל:

$$\begin{cases} 120 \cdot Z_K - 100{,}000 \cdot v^{K+1}, & K < 480 \\ 120 \cdot Z_{479}, & K \geq 480 \end{cases}$$

(ב) נחשב עתה:

את **ערכי** הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח,

את פונקצית ההסתברות של הרווח\הפסד של חברת הביטוח,

את **תוחלת** הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח,

ואת **שונות** של הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח.

הצגת ערכי הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח

בעמודה **AD** נציג את ערכי הרווח\הפסד,

הצגת פונקצית ההסתברות של הרווח\הפסד המיקרי של חברת הביטוח

בעמודה **AE** נציג את ערכי הרווח\הפסד,

חישוב התוחלת של הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח:

בתא **AF6** נציג את תוחלת הרווח\הפסד של חברת הביטוח מחושב בעת ההנפקה.

חישוב שונות הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח:

בתא **AH6** נציג את ערך השונות של הרווח\ההפסד של חברת הביטוח

בתא **AJ6** נציג את ערך השונות של הרווח\הפסד של חברת הביטוח שהתקבלה על ידי נוסחת החישוב

הערות:

(א) מתכונות התוחלת נובע שתוחלת הרווח\הפסד של חברת הביטוח שווה ל:

$$120 \cdot \ddot{a}_{300:432} - 100{,}000 \cdot A^{1}_{300:480}$$

(ב) לכן על מנת לחשב את תוחלת הרווח\הפסד של חברת ביטוח,ניתן להשתמש בתוחלת תזרים הקצבה המיקרי ותוחלת הטבת מוות.

(ג) בתא **AG6** נציג חישוב אלטרנטיבי של תוחלת הרווח\ההפסד של חברת הביטוח,

דוגמה ג-04 :

בעל ואישה בני 35 ו 30 בהתאמה רוכשים את הפוליסה הבאה: בסוף שנת מותו של האחרון מבני הזוג יקבלו המוטבים של בני הזוג 500,000 ₪, בתמורה משלמים בני הזוג פרמיות שנתיות מראש בגובה P כל עוד שני בני הזוג חיים.

יהיו K_m, K_f שאריות אורכי החיים של הבעל והאישה מעת הנפקת הפוליסה בהתאמה. תהי

פונקצית השרידות של K_m, K_f נתונה על ידי:

$$P(K_m \geq r,\ K_f \geq c) = e^{-0.02 \cdot r - 0.016c - 0.0002 \cdot r \cdot c}, \quad r, c = 0, 1, \ldots$$

פונקציות השרידות של $K_{[1]}$, $K_{[2]}$ נתונות על ידי:

$$P(K_{[1]} \geq r) = P(K_m \geq r,\ K_f \geq r) = \exp(-0.036 \cdot r - 0.0002 \cdot r^2)$$

$$P(K_{[2]} \geq c) = P(K_m \geq c) + P(K_f \geq c) - P(K_m \geq c, K_f \geq c) =$$

$$e^{-0.02 \cdot c} + e^{-0.016 \cdot c} - e^{0.036 \cdot c - 0.0002 \cdot c^2}$$

בעזרת בעמודות B ו C נציג את פונקציות השרידות של המ.מ.י"ם $K_{[2]}$ ו $K_{[1]}$.

ערך התזרים המקרי של תשלומי הפרמיות בגובה 1 ₪ (P=1) מחושב בעת הנפקת הפוליסה

נתון על ידי:

$$\sum_{r=0}^{K_{[1]}} v^r = \frac{1 - v^{K_{[1]}+1}}{d}.$$

בעמודה F אנו מציגים את ערכי תזרים תשלומי הפרמיות על פי הנוסחה:

$$Z_{K_{[1]}} = \sum_{r=0}^{K_{[1]}} v^r$$

ובעמודה G אנו מציגים את ערכי תזרים תשלומי הפרמיות על פי הנוסחה:

$$\frac{1 - v^{K_{[1]}+1}}{d}.$$

בתא H3 אנו מציגים את תוחלת ערכי תזרים תשלומי הפרמיות על פי הנוסחה:

$$\sum_{r=0}^{\infty} Z(r)\cdot P(K_{[1]}=r)$$

בתא I3 אנו מציגים את תוחלת ערכי תזרים תשלומי הפרמיות על פי הנוסחה:

$$\frac{1-Ev^{K_{[1]}+1}}{d}$$

בתא J3 אנו מציגים את תוחלת ערכי תזרים תשלומי הפרמיות על פי הנוסחה:

$$\sum_{r=0}^{\infty} v^{r}\cdot P(K_{[1]}\geq r)$$

ערך הטבת המוות המקרי מחושב בעת הנפקת הפוליסה נתון על ידי:

$$.100{,}000\cdot v^{K_{[2]}+1}$$

בתא K3 אנו מציגים את תוחלת הטבת המוות על פי הנוסחה:

$$.100{,}000\cdot \sum_{r=0}^{\infty} v^{r+1}\cdot P(K_{[2]}=r)$$

הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח נתון על ידי:

$$P\cdot Z(K_{[1]})-1000{,}000\cdot v^{K_{[2]}+1}$$

תחת ההנחה שתוחלת הרווח\ההפסד המיקרי של חברת הביטוח שווה לאפס ניתן לחשב את ערכה של הפרמיה P בעזרת המשוואה:

$$.\,P\cdot EZ(K_{[1]})-1000{,}000\cdot Ev^{K_{[2]}+1}$$

או באופן שקול:

$$P = \frac{1000,000 \cdot Ev^{K_{[2]}+1}}{EZ_{K_{[1]}}}.$$

בתא L3 אנו מציגים את ערכו של P.