3 ביולי 2017

מיומנו של אקטואר: מודלים של GARCH לחיזוי תנודתיות

מודל "ההטרוסקדסטיות המותנית האוטורגרסיבית הכללית", לאמור ה- GARCH (ה- Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) משמש למידול התנודתיות (קרי, סטיית התקן) ההיסטורית והעתידית החזויה של נייר ערך סחיר (למשל, מחירי מניות, מחירי סחורות, מחירי נפט, וכו'). מערך הנתונים חייב להיות איפוא סדרה עתית (קרי, סדרת נתוני זמן) של מחירים גולמיים. מודל ה- GARCH יתמיר תחילה את המחירים לתשואות ולאחר מכן יריץ אופטימיזציה פנימית על מנת להתאים את הנתונים ההיסטוריים למבנה עתי מסוג תסוגה לתוחלת (mean-reverting) של סטיות התקן, באמצעות הנחה שהתנודתיות הינה הטרוסקדסטית מטבעה (קרי, משתנה על פני זמן בהתאם למאפיינים אקונומטריים). ההנחות התיאורטיות של מודל ה- GARCH אינן בתחולת מאמר זה.

מצב תחזית התנודתיות הטיפוסי דורש ש- $P=1,\ Q=1$; התקופתיות = מספר התקופות בשנה (12 עבור נתונים חודשיים, 52 עבור נתונים שבועיים, 252 או 365 עבור נתונים יומיים); בסיס = מינימום של 1 ועד לערך התקופתיות; תקופות התחזית = מספר סטיות התקן השנתיות החזויות שאנו רוצים לקבל. ישנם כמה מודלים של GARCH כגון: EGARCH, EGRACH-T, GARCH-M, GJR-GARCH, GJR-GARCH, IGARCH ו- T-GARCH.

מודלים של GARCH משמשים בעיקר לניתוח סדרות עתיות של נתונים פיננסיים על מנת לברר את השונויות וסטיות התקן המותנות של הנתונים. לאחר מכן, סטיות תקן אלו משמשות להערכת שוויין של אופציות, אולם כמות הנתונים ההיסטוריים הדרושה לצורך קבלת אומדן תנודתיות טוב איננה מבוטלת ואף משמעותית. על פי רוב, נדרשות כמה עשרות ואפילו מאות נקודות נתונים לצורך קבלת אומדני GARCH טובים.

GARCH הינו שם כולל עבור משפחה של מודלים אשר יכולים לקבל מגוון צורות, המוכרות כ- $GARCH(p,q)$ כאשר p ו- q הינם מספרים שלמים וחיוביים המגדירים את מודל ה-

GARCH המתקבל ואת התחזיות שלו. במרבית המקרים עבור מכשירים פיננסיים, מודל ה- $GARCH(1,1)$ הינו מספיק ועל כן הוא גם מצוי בשימוש נרחב בשדה הפיננסי. לדוגמא, מודל $GARCH(1,1)$ מקבל את הצורה הבאה:

$$y_t = x_t\gamma + \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

כאשר המשתנה התלוי של המשוואה הראשונה (y_t) הינו פונקציה של משתנים אקסוגניים (x_t) עם איבר שגיאה (ε_t) כלשהו. המשוואה השנייה אומדת את השונות (קרי, ריבוע סטיית התקן σ_t^2) בזמן t, התלויה בתוחלת היסטורית כלשהי (ω); חדשות אודות התנודתיות מהתקופה הקודמת, נמדדות למעשה בפיגור של ריבועי השאריות ממשוואת התוחלת (ε_{t-1}^2); והתנודתיות מהתקופה הקודמת (σ_{t-1}^2). ספציפיקציית המידול המדוייקת של מודל GARCH איננה בתחולת מאמר זה. די יהיה בלומר כי לשם הרצת מודל GARCH יש צורך בידע לא מבוטל במידול אקונומטרי (כגון בביצוע בחינות ספציפיקציות של מודל, שבירות מבניות, ואמידת שגיאות), מה שאומר שמודל ה- GARCH פחות זמין לאנליסט הממוצע. בעיה נוספת הקשורה למודלים של GARCH הינה שהמודל, על פי רוב, אינו מספק התאמה סטטיסטית טובה. לאמור- בלתי אפשרי לנבא את שוק המניות ובוודאי שקשה לנבא, באותה מידה או אפילו יותר, את התנודתיות של מניה מסוימת על פני זמן.

נציין כי לפונקציית ה- GARCH ישנן מספר תשומות כדלקמן:

- *נתוני הסדרה העתית-* הסדרה העתית של הנתונים בסדר כרונולוגי (למשל, מחירי מניות). ברגיל, נדרשות עשרות נקודות נתונים עבור תחזית תנודתיות הוגנת.
- *תקופתיות-* מספר שלם חיובי כלשהו המציין את מספר התקופות בשנה (למשל, 12 עבור נתונים חודשיים, 252 עבור נתוני מסחר יומיים וכו'), בהנחה שאנו רוצים להמיר את התנודתיות היומית לתנודתיות שנתית.

- *בסיס הניבוי-* מספר התקופות אחרונית (של נתוני הסדרה העתית) המשמשות כבסיס לחיזוי התנודתיות. ככל שמספר זה הינו גבוה יותר, כך הבסיס ההיסטורי, המשמש לחיזוי התנודתיות העתידית, הינה ארוך יותר.
- *תקופת החיזוי-* מספר שלם המציין כמה תקופות עתידיות מעבר למחירי המניות ההיסטוריים הקיימים אנו רוצים לחזות.
- *מיקוד השונות-* משתנה זה הינו מערך המוגדר כ- False כברירת מחדל (אפילו אם לא נזין שום דבר) אך ניתן לקבוע אותו כ- True. False פירושו שמשתנה האומגה (ω) עובר אופטימיזציה ומחושב אוטומטית. מומלץ להשאיר את המשתנה הזה ריק. אולם, במידה ורוצים ליצור תנודתיות הכוללת תסוגה לתוחלת עם מיקוד שונות, אז יש לקבוע את המשתנה האמור כ- True.
- *P*- מספר הפיגורים הקודמים במשוואת התוחלת.
- *Q*- מספר הפיגורים הקודמים במשוואת השונות.

הטבלה שלהלן מפרטת כמה מהספציפיקציות של GARCH עבור שתי הנחות בדבר התפלגות הבסיס: האחת עבור התפלגות נורמלית והשנייה עבור התפלגות t.

	$z_t \sim$ Normal Distribution	$z_t \sim$ T Distribution
GARCH-M Variance in Mean Equation	$y_t = c + \lambda\sigma_t^2 + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$	$y_t = c + \lambda\sigma_t^2 + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$
GARCH-M Standard Deviation in Mean Equation	$y_t = c + \lambda\sigma_t + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$	$y_t = c + \lambda\sigma_t + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$
GARCH-M Log Variance in Mean Equation	$y_t = c + \lambda\ln(\sigma_t^2) + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$	$y_t = c + \lambda\ln(\sigma_t^2) + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$
GARCH	$y_t = x_t\gamma + \varepsilon_t$ $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$	$y_t = \varepsilon_t$ $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$
EGARCH	$y_t = \varepsilon_t$ $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta\cdot\ln(\sigma_{t-1}^2) +$ $\alpha\left[\left\lvert\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right\rvert - E(\lvert\varepsilon_t\rvert)\right] + r\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$ $E(\lvert\varepsilon_t\rvert) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$y_t = \varepsilon_t$ $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta\cdot\ln(\sigma_{t-1}^2) +$ $\alpha\left[\left\lvert\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right\rvert - E(\lvert\varepsilon_t\rvert)\right] + r\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$ $E(\lvert\varepsilon_t\rvert) = \frac{2\sqrt{v-2}\,\Gamma((v+1)/2)}{(v-1)\Gamma(v/2)\sqrt{\pi}}$
GJR-GARCH	$y_t = \varepsilon_t$ $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 +$ $r\varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \beta\sigma_{t-1}^2$ $d_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$y_t = \varepsilon_t$ $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 +$ $r\varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \beta\sigma_{t-1}^2$ $d_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל
Israel Association of Valuators and Financial Actuaries

עבור מודלים של GARCH-M, משוואת השונות המותנית הינה זהה עבור כל שש הוריאציות המוצגות לעיל, אולם משוואות התוחלת שונות זו מזו ו- z_t יכול להיות התפלגות נורמלית או התפלגות t.

הפרמטרים הנאמדים עבור GARCH-M תחת הנחת התפלגות נורמלית הינם חמשת הפרמטרים שבמשוואות התוחלת והשונות המותנית. הפרמטרים הנאמדים עבור GARCH-M תחת הנחת התפלגות t הינם חמשת הפרמטרים שבמשוואות התוחלת והשונות המותנית בתוספת פרמטר נוסף, מספר דרגות החופש של התפלגות t.

לעומת זאת, עבור מודלים של GJR, משוואת התוחלת הינה זהה עבור כל שש הוריאציות המוצגות לעיל, אולם משוואות השונות המותנית שונות זו מזו ו- z_t יכול להיות התפלגות נורמלית או התפלגות t. הפרמטרים הנאמדים עבור EGARCH ו- GJR-GARCH תחת הנחת התפלגות נורמלית הינם ארבעת הפרמטרים שבמשוואות השונות המותנית. הפרמטרים הנאמדים עבור GARCH, EGARCH ו- GJR-GARCH תחת הנחת התפלגות t הינם הפרמטרים שבמשוואות השונות המותנית בתוספת מספר דרגות החופש של התפלגות t.

בכבוד רב,

רועי פולניצר

יו"ר ומנכ"ל לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל

WWW.IAVFA.ORG
ת.ד. 57334, תל אביב, 6157301
077-5070590 153-77-5070590 IAVFA1020@GMAIL.COM