

פרופ' נפתלי לנגברג

סעיף ב:

משתנים מיקרים בדידים דו מימדיים (מ.מ.י"ם)

סימון:

יהי זוג מ.מ.י"ם בדידים המקבלים את הערכים $0, 1, 2, \dots$.

הערות:

(א) זוג מ.מ.י"ם הבדידים (K_1, K_2) יכול לתאר את אורכי החיים המקריים הנמדדים ביחידות

זמן שלמות של שתי נפשות בהתאמה (למשל אורכי החיים של בעל ואישה).

(ב) פונקצית ההסתברות הדו-ממדית (Bivariate Probability Function- BPF) של זוג

המ.מ.י"ם הבדידים (K_1, K_2) נתונה על ידי:

$$P(K_1 = r, K_2 = c), r, c = 0, 1, 2, \dots$$

(ג) פונקצית השרידות הדו-ממדית (Bivariate Survival Function- BSF) של זוג המ.מ.י"ם

הבדידים (K_1, K_2) נתונה על ידי:

$$P(K_1 \geq r, K_2 \geq c), r, c = 0, 1, 2, \dots$$

(ד) עבור $r, c = 0, 1, 2, \dots$ מתקיימים שני השוויונים הבאים:

$$P(K_1 \geq r, K_2 \geq c) = \sum_{s=r}^{\infty} \sum_{t=c}^{\infty} P(K_1 = s, K_2 = t)$$

$$P(K_1 = r, K_2 = c) = P(K_1 \geq r, K_2 \geq c) + P(K_1 \geq r+1, K_2 \geq c+1) \\ - P(K_1 \geq r+1, K_2 \geq c) - P(K_1 \geq r, K_2 \geq c+1),$$

לכן פונקצית ההסתברות הדו-ממדית ופונקצית השרידות הדו-ממדית קובעות אחת את

משנתה.

(ה) זוג מ.מ.י"ם נקבע הסתברותית על ידי פונקצית ההסתברות הדו-ממדית או על ידי פונקצית

השרידות הדו-ממדית. לכן מטריצת ההסתברות הדו-ממדית $\{P(K_1 = r, K_2 = c)\}$

פרופ' נפתלי לנגברג

או מטריצת השרידות הדו-ממדית $\{P(K_1 \geq r, K_2 \geq c)\}$ משמשת כמטריצת פרמטרים

המאפיינת וקובעת את זוג המ.מ.י"ם (K_1, K_2) .

לצורך ניתוח זוג מ.מ.י"ם מחשבים את מטריצת ההסתברות הדו-ממדית או את מטריצת

השרידות הדו-ממדית (בדרך כלל רצוי לחשב את שתי המטריצות).

(ו) בשלוש הדוגמאות הבאות נבנה מטריצת שרידות דו-ממדית ומטריצת הסתברות דו-ממדית.

דוגמה ב-01:

יהי (K_1, K_2) זוג מ.מ.י"ם בדידים המקבלים את הערכים $0, 1, \dots, 50$. המשתנה K_1

מתאר את שארית אורך חיי אישה כיום בת 60 שנה בשנים שלמות ו K_2 מתאר את שארית

אורך חיי בעלה כיום בן 65 שנה בשנים שלמות.

יהיו U_1, U_2, U_3 שלושה מ.מ.י"ם בדידים בלתי תלויים בעלי פונקציות שרידות חד-ממדיות

הנתונות בקובץ "דוגמה ב-01" בגיליון Data בעמודות B-D.

עבור $r, c = 0, 1, 2, \dots, 50$ פונקצית השרידות הדו-ממדית של זוג המ.מ.י"ם (K_1, K_2)

נתונה על ידי הנוסחה:

$$P(K_1 \geq r, K_2 \geq c) = P(\min(U_1, U_3) \geq r, \min(U_2, U_3) \geq c) =$$

$$P(U_1 \geq r, U_2 \geq c, U_3 \geq \max(r, c)) = P(U_1 \geq r) \cdot P(U_2 \geq c) \cdot P(U_3 \geq \max(r, c))$$

הצגת מטריצת השרידות הדו-ממדית בעזרת הנוסחה הנתונה:

בעזרת פונקצית ה- **INDIRECT** נציג בקובץ "דוגמה ב-01" בגיליון **BSFINDIRECT**

בתאים B3-AZ53 את מטריצת השרידות הדו-ממדית של המ.מ.י"ם K_1, K_2 .

נציג אלטרנטיבית בעזרת פונקצית ה- **LOOKUP** בקובץ "דוגמה ב-01" בגיליון

BSFLOOKUP את מטריצת השרידות הדו-ממדית של המ.מ.י"ם K_1, K_2 .

פרופ' נפתלי לנגברג

הצגת מטריצת ההסתברות הדו-ממדית:

בעזרת הנוסחה המציגה את פונקציית ההסתברות הדו-ממדית על ידי פונקציית השרידות הדו-ממדית נקבל בקובץ "דוגמה ב-01" בגיליון BPF בתאים B3-AZ53 את מטריצת ההסתברות הדו-ממדית. בתא A1 נסכם את כל הערכים שמופיעים בתאים B3-AZ53. אם התוצאה המתקבלת בתא A1 היא 1 יש להניח שהצגת מטריצת ההסתברות הדו-ממדית נכונה.

הערות:

(א) בקובץ "דוגמה ב-01 VBA" נבצע בעזרת השפה VBA

(Visual Basic for Applications) את אותם חישובים שבצענו בקובץ

"דוגמה ב-01".

(ב) הקובץ "דוגמה ב-01" הוא בגודל של כ-1.6 מגה. לעומת זאת הקובץ

"דוגמה ב-01 VBA" הוא בגודל של כ-0.1 מגה.

הסברים המתייחסים לקובץ "דוגמה ב-01 VBA"

(א) בגיליון בשם Data בעמודות B, C, D או מצייגים את פונקציות השרידות

החד-ממדיות של המ.מ.י"ם U_1, U_2, U_3 .

(ב) ב- Visual Basic Editor נציג את ה-Macros A0-A6 שביחד מאפשרים

לחשב את מטריצת ההישרדות הדו-ממדית, מטריצת ההתפלגות הדו-ממדית

של זוג המ.מ.י"ם K_1, K_2 .

A0: ה-Macro מורה להציג בגיליונות בשם BSF ו BPF את מספרי

השורות (r) ואת מספרי העמודות (c).

A1: ה-Macro בונה מטריצה בה שלוש עמודות ו 61 שורות. העמודות

מייצגות את פונקציות ההישרדות החד-ממדיות של שלושת המ.מ.י"ם

פרופ' נפתלי לנגברג

$$U_1, U_2, U_3$$

A2: Macro-ה בונה את מטריצת ההישרדות הדו מימדית של המ.מ.י"ם

$$K_1, K_2$$

A3: Macro-ה בונה את מטריצת ההסתברות הדו מימדית של המ.מ.י"ם

$$K_1, K_2$$

A4: Macro-ה רושם את מטריצת ההישרדות הדו-מימדית לגיליון בשם

BSF ואת מטריצת ההסתברות הדו-מימדית לגיליון בשם BPF.

All: Macro-ה מפעיל את A0-A4 ומציג בקובץ "דוגמה ב-VBA 01"

את שתי המטריצות.

דוגמה ב-02:

יהי (K_1, K_2) זוג מ.מ.י"ם בדידים המקבלים את הערכים $0, 1, \dots, 60$. המשתנה K_1

מתאר את שארית אורך חיי אישה כיום בת 30 שנה בשנים שלמות ו K_2 מתאר את

שארית אורך חיי אחיה כיום בן 35 שנה בשנים שלמות.

יהיו U_1, U_2, U_3 שלושה מ.מ.י"ם בדידים בלתי תלויים בעלי פונקציות ההסתברות

חד ממדיות הנתונות בקובץ "דוגמה ב-02" בגיליון Data בעמודות B-D.

עבור $r, c = 0, 1, 2, \dots, 60$ פונקצית ההסתברות המשותפת של זוג המ.מ.י"ם (K_1, K_2)

נתונה על ידי:

$$P(K_1 = r, K_2 = c) = P[\max(U_1 - U_3, 0) = r, \max(U_2 - U_3, 0) = c]$$

הערה:

על ידי הפרדת לארבעת המקרים: $r = 0, c \geq 1, r \geq 1, c = 0, r = c = 0$ ו $r \geq 1, c \geq 1$

נקבל ש:

מקרה A:

פרופ' נפתלי לנגברג

עבור $r=0, c=0$

$$P(K_1=0, K_2=0) = P(U_1 \leq U_3, U_2 \leq U_3) =$$

$$\sum_{m=0}^{60} P(U_1 \leq m) \cdot P(U_2 \leq m) \cdot P(U_3 = m)$$

מקרה B:

עבור $r=1,2,\dots, c=0$

$$P(K_1=r, K_2=0) = P(U_1 = U_3 + r, U_2 \leq U_3) =$$

$$\sum_{m=0}^{60} P(U_1 = m + r) \cdot P(U_2 \leq m) \cdot P(U_3 = m)$$

מקרה C:

עבור $r=0, c=1,2,\dots$

$$P(K_1=0, K_2=c) = P(U_1 \leq U_3, U_2 = U_3 + c) =$$

$$\sum_{m=0}^{60} P(U_1 \leq m) \cdot P(U_2 = m + r) \cdot P(U_3 = m) =$$

מקרה D:

עבור $r,c=1,2,\dots$

$$P(K_1=r, K_2=c) = P(U_1 = U_3 + r, U_2 = U_3 + c) =$$

$$\sum_{m=0}^{60} P(U_1 = m + r) \cdot P(U_2 = m + c) \cdot P(U_3 = m)$$

המטרה הראשונה היא להציג בקובץ "דוגמה ב-VBA 02" בגיליון BPF את מטריצת

ההסתברות הדו-ממדית. דרך נוחה להשיג מטרה זו היא בעזרת תכנות ב-VBA.

הסברים המתייחסים לקובץ "דוגמה ב-VBA 02"

(א) בגיליון בשם Data בעמודות B, C, D או מצגים את פונקציות ההסתברות

פרופ' נפתלי לנגברג

החד-ממדיות של המ.מ.י"ם U_1, U_2, U_3 .

(ב) ב- **Visual Basic Editor** נציג את ה-Macros **P0-P6** שביחד מאפשרים

לחשב את מטריצת ההישרדות הדו-ממדית, מטריצת ההתפלגות הדו-ממדית

של זוג המ.מ.י"ם K_1, K_2

P0: ה-Macro מורה להציג בגליונות בשם BSF וBPF את מספרי

השורות (r) ואת מספרי העמודות (c).

P1: ה-Macro בונה מטריצה בה שלוש עמודות ו 61 שורות. העמודות

מייצגות את פונקציות ההסתברות החד-ממדיות של שלושת

המ.מ.י"ם U_1, U_2, U_3 .

P2: ה-Macro בונה מטריצה בה שלוש עמודות ו 61 שורות. העמודות

מייצגות את פונקציות ההישרדות החד-ממדיות של שלושת

המ.מ.י"ם U_1, U_2, U_3 .

P3 ה-Macro בונה את פונקצית ההסתברות הדו-ממדית של המ.מ.י"ם

K_1, K_2 למקרה D: עבור $r, c = 1, 2, \dots$

$$.BPF(r, c) = P(K_1 = r, K_2 = c)$$

P4 ה-Macro בונה את פונקצית ההסתברות הדו-ממדית של המ.מ.י"ם

K_1, K_2 למקרה C: עבור $r = 0, c = 1, 2, \dots$

$$.BPF(0, c) = P(K_1 = 0, K_2 = c)$$

P5 ה-Macro בונה את פונקצית ההסתברות הדו-ממדית של המ.מ.י"ם

K_1, K_2 למקרה B: עבור $r = 1, 2, \dots, c = 0$

$$.BPF(r, 0) = P(K_1 = r, K_2 = 0)$$

פרופ' נפתלי לנגברג

P6 Macro-ה בונה את פונקצית ההסתברות הדו-ממדית של המ.מ.י"ם

$$, r=0, c=0 \text{ עבור } A \text{ למקרה } K_1, K_2$$

$$. \text{BPF}(0,0) = P(K_1 = 0, K_2 = 0)$$

P7 Macro-ה בונה את פונקצית השרידות הדו-ממדית של המ.מ.י"ם

$$. K_1, K_2$$

PAII מציגה בגיליונות **BPF** ו **BSF** את מטריצת ההסתברות הדו-

ממדית ומטרית השרידות הדו-ממדית של המ.מ.י"ם K_1, K_2

בהתאמה. בגיליון **BPF** בתא A1 נסכם את כל הערכים

שמופיעים בתאים B3-BJ63. אם התוצאה המתקבלת בתא A1

היא 1 יש להניח שהצגת פונקצית ההסתברות הדו-ממדית נכונה.

הערה:

כפי שנראה בדוגמה הבאה אם המ.מ.י"ם K_1, K_2 **בלתי תלויים** חישוב מטריצת השרידות

הדו-ממדית וחישוב מטריצת ההסתברות הדו-ממדיות יותר פשוט.

דוגמה ב-03:

יהי (K_1, K_2) זוג מ.מ.י"ם בדידים **בלתי תלויים** המקבלים את הערכים $0, 1, \dots, 56$.

המשתנה K_1 מתאר את שארית אורך חיי אחד משני שותפים בעסק כיום בן 30 שנה בשנים

שלמות ו K_2 מתאר את שארית אורך חיי השותף השני כיום בן 35 שנה בשנים שלמות.

בקובץ "**דוגמה ב-03**" בגיליון **Data** בעמודות B-C נציג את פונקציות השרידות

החד- ממדיות של המ.מ.י"ם K_1, K_2 ובעמודות D-E נציג את פונקציות ההסתברות

החד- ממדיות של המ.מ.י"ם K_1, K_2 .

הצגת מטריצת השרידות הדו-ממדית בעזרת הנוסחה הנתונה:

עבור $r, c = 0, 1, 2, \dots, 56$ פונקצית השרידות הדו-ממדית של זוג המ.מ.י"ם

פרופ' נפתלי לנגברג

(K_1, K_2) נתונה על ידי:

$$P(K_1 \geq r, K_2 \geq c) = P(K_1 \geq r) \cdot P(K_2 \geq c)$$

בעזרת פונקציות ה- **INDIRECT** נציג בקובץ "דוגמה ב-03" בגיליון **BSFINDIRECT**

בתאים B3-BF59 את מטריצת השרידות הדו-ממדית של המ.מ.י"ם K_1, K_2 .

נציג אלטרנטיבית בעזרת פונקציות ה- **LOOKUP** בקובץ "דוגמה ב-03" בגיליון

BSFLOOKUP בתאים B3-BF59 את מטריצת השרידות הדו-ממדית של המ.מ.י"ם

$$K_1, K_2$$

הצגת מטריצת ההסתברות הדו-ממדית:

עבור $r, c = 0, 1, 2, \dots, 56$ פונקציות ההסתברות הדו-ממדית של זוג המ.מ.י"ם

(K_1, K_2) נתונה על ידי:

$$P(K_1 = r, K_2 = c) = P(K_1 = r) \cdot P(K_2 = c)$$

בקובץ "דוגמה ב-03" בגיליון **BPF** בתאים B3-BF59 נציג את מטריצת ההסתברות

הדו-ממדית. בתא A1 נסכם את כל הערכים שמופיעים בתאים B3-BF59. אם

התוצאה המתקבלת בתא A1 היא 1 יש להניח שהצגת מטריצת ההסתברות

הדו-ממדית נכונה.

נציג עתה גדלים הנגזרים מזוג המ.מ.י"ם (K_1, K_2)

חישוב גדלים הנגזרים ממטריצת השרידות הדו-ממדית או ממטריצת ההסתברות הדו-ממדית.

נציג את הגדלים הבאים:

(א) את תוחלת מכפלת המ.מ.י"ם K_1, K_2 ,

(ב) את פונקציות השונות המשותפת של זוג המ.מ.י"ם (K_1, K_2),

(ג) את מקדם המתאם בין שני המ.מ.י"ם K_1, K_2

פרופ' נפתלי לנגברג

(ד) חישוב ההסתברויות:

$$,P(K_1 = K_2), P(K_1 > K_2), P(K_1 < K_2)$$

$$,P(K_1 = r, K_2 = K_1), P(K_1 = r, K_2 < K_1), P(K_1 = r, K_1 < K_2)$$

(ה) את פונקציות השרידות וההסתברות של המ.מ.י"ם השוליים K_1, K_2

(ו) את התוחלות והשונויות של המ.מ.י"ם K_1, K_2

נחשב בקובץ אקסל בשם "Calculations" את כל הגדלים הנ"ל כפונקציה של מטריצת

שרידות דו-ממדית נתונה או כפונקציה של מטריצת הסתברות דו-ממדית נתונה. (כך שעל

ידי "השתלת" מטריצת פרמטרים נקבל מידית את כל הגדלים).

(א) תוחלת מכפלת המ.מ.י"ם $K_1 \cdot K_2$ נתונה על שתי הנוסחאות הבאות:

$$EK_1 \cdot K_2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} r \cdot c \cdot P(K_1 = r, K_2 = c)$$

נשים לב ש:

$$EK_1 \cdot K_2 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \left[\sum_{s=1}^r 1 \right] \cdot \left[\sum_{t=1}^c 1 \right] P(K_1 = r, K_2 = c)$$

על ידי החלפת סדר הסכימה נקבל נוסחה אלטרנטיבית ל- $EK_1 \cdot K_2$ בעזרת פונקצית השרידות

הדו-ממדית:

$$EK_1 \cdot K_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{r=s}^{\infty} \sum_{c=t}^{\infty} P(K_1 = r, K_2 = c) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} P(K_1 \geq s, K_2 \geq t)$$

(ב) השונות המשותפת של זוג המ.מ.י"ם הבדידים (K_1, K_2) (הקוורנס, סימון:

$$\text{Cov}(K_1, K_2) \quad \text{או} \quad \sigma_{K_1, K_2} \quad \text{נתונה על ידי:}$$

$$\text{Cov}(K_1, K_2) = E[(K_1 - EK_1) \cdot (K_2 - EK_2)] =$$

פרופ' נפתלי לנגברג

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} (r - EK_1) \cdot (c - EK_2) \cdot P(K=r, K=c)$$

או על ידי הנוסחה האלטרנטיבית הבאה:

$$\text{Cov}(K_1, K_2) = EK_1 \cdot K_2 - EK_1 \cdot EK_2$$

(ג) מקדם המתאם של זוג המ.מ.י"ם הבדידים (K_1, K_2) (סימון: $\rho(K_1, K_2)$) נתון

על ידי:

$$\rho(K_1, K_2) = \frac{\text{Cov}(K_1, K_2)}{\sigma_{K_1} \cdot \sigma_{K_2}}$$

(ד) ההסתברויות $P(K_1=r, K_2=K_1)$, $P(K_1=r, K_2 < K_1)$, $P(K_1=r, K_1 < K_2)$

נתונות על ידי:

$$P(K_1=r, K_1 < K_2) = \sum_{c=r+1}^{\infty} P(K_1=r, K_2=c) = \sum_{c=0}^{\infty} \text{IF}(c > r, \text{BPF}(r, c), 0)$$

וש:

$$P(K_1=r, K_2 < K_1) = \sum_{c=0}^{r-1} P(K_1=r, K_2=c) = \sum_{c=0}^{\infty} \text{IF}(r < c, \text{BPF}(r, c), 0)$$

אם שארית אורך החיים של נפש א נתונה על ידי המ.מ. K_1 ושל נפש ב נתונה על

ידי K_2 אז:

$P(K_1=r, K_1 < K_2)$ היא ההסתברות שנפש א' תחיה r יחידות זמן שלמות ותמות

לפני נפש ב',

$P(K_1=r, K_2 < K_1)$ היא ההסתברות שנפש א' תחיה r יחידות זמן שלמות ותמות

אחרי נפש ב'.

פרופ' נפתלי לנגברג

היא ההסתברות שנפש א' ונפש ב' תחיינה r יחידות זמן $P(K_1 = r, K_2 = K_1)$

שלמות.

ההסתברויות $P(K_1 = K_2)$, $P(K_1 > K_2)$, $P(K_1 < K_2)$ נתונות על ידי:

$$P(K_1 < K_2) = \sum_{r=0}^{\infty} P(K_1 = r, K_1 < K_2)$$

$$P(K_2 < K_1) = \sum_{r=0}^{\infty} P(K_1 = r, K_2 < K_1)$$

$$P(K_2 = K_1) = \sum_{r=0}^{\infty} P(K_1 = r, K_2 = K_1)$$

אם שארית אורך החיים של נפש א נתונה על ידי המ.מ. K_1 ושל נפש ב נתונה על

ידי K_2 אז:

$P(K_1 < K_2)$ היא ההסתברות שהאישה נפטרה לפחות יחידת זמן אחת לפני בעלה,

$P(K_1 > K_2)$ היא ההסתברות שהבעל נפטר לפחות יחידת זמן אמת לפני אשתו,

$P(K_1 = K_2)$ היא ההסתברות ששני בני הזוג נפטרו באותה יחידת זמן .

(ה) פונקציות השרידות החד מימדיות של המ.מ. K_1, K_2 ניתנות לחישוב מפונקציות

השרידות הדו ממדית ומפונקציות ההסתברות הדו ממדית באופן הבא:

$$P(K_1 \geq r) = P(K_1 \geq r, K_2 \geq 0), \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(K_2 \geq c) = P(K_1 \geq 0, K_2 \geq c), \quad c = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(K_1 \geq r) = \sum_{m=r}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} P(K_1 = m, K_2 = c), \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

פרופ' נפתלי לנגברג

$$P(K_2 \geq c) = \sum_{m=c}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} P(K_1 = r, K_2 = m), \quad c = 0, 1, 2, \dots$$

חישובים בקובץ אקסל בשם "Calculations"

אנו זקוקים בקובץ "Calculations" למטריצת השרידות הדו-ממדית המוחלפת (סימון:

TBSF) ולמטריצת ההסתברות הדו-ממדית המוחלפת. (סימון: TBPf). בעזרת פעולת

ה- Transpose (המופיעה ב- Paste Special) נציג שתי המטריצות המבוקשות.

נעיר שבגיליון בשם "Results" בתאים J2-S2 נציג את התוחלות, המומנטים מסדר שני,

והשונויות של המ.מ.י"ם השוליים K_1, K_2 .

חישוב תוחלת מכפלת המ.מ.י"ם K_1, K_2 ($E(K_1 \cdot K_2)$):

בגיליון בשם "K1K2" נחשב את ערכי $r \cdot c \cdot P(K_1 = r, K_2 = c)$ ובתא A1 נסכם את

ערכי התאים B3:DR123 ונקבל את $E(K_1 \cdot K_2)$.

אלטרנטיבית נסכם בתא A1 בגיליון בשם "BSF" את ערכי התאים C4:DR123 ונקבל את

$$E(K_1 \cdot K_2)$$

חישוב השונות המשותפת ומקדם המתאם של המ.מ.י"ם K_1, K_2 :

בתאי הגיליון "Cov" נציג את ערכי $(r - EK_1) \cdot (c - EK_2) \cdot P(K_1 = r, K_2 = c)$. ובתא

A1 נסכם את התאים B3:DR123 ונקבל את ערכה של השונות המשותפת ונעתיק אותה

לתא W2 בגיליון "Results".

בתא V2 בגיליון "Results" נציג את החישוב האלטרנטיבי של השונות המשותפת.

בתא X2 בגיליון "Results" נציג את החישוב של מקדם המתאם.

הצגת פונקציות השרידות החד-ממדית בקובץ "Calculations":

חישוב בעזרת מטריצת השרידות הדו-ממדית:

$$P(K_1 \geq r) = P(K_1 \geq r, K_2 \geq 0) = \text{BSF}(r, 0)$$

פרופ' נפתלי לנגברג

$$P(K_2 \geq c) = P(K_1 \geq 0, K_2 \geq c) = \text{TBSF}(c, 0)$$

מעתיקים מגיליון **BSF** ומגיליון **TBSF** מהקובץ המתאים את התאים B3:B123

לתאים B3:B123 ולתאים D3:D123 בגיליון **Results** בקובץ **Calculations**

ומקבלים את פונקציות השרידות החד-ממדיות של (K_1, K_2) .

חישוב בעזרת מטריצת ההסתברות הדו ממדית:

$$P(K_1 \geq r) = \sum_{m=r}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} P(K_1 = m, K_2 = c) = \sum_{m=r}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \text{BPF}(m, c)$$

$$P(K_2 \geq c) = \sum_{m=c}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} P(K_1 = r, K_2 = m) = \sum_{m=c}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \text{TBPF}(m, r)$$

אנו מסכמים את התאים B3:\$DR\$123 בגיליון **BPF** ובגיליון **TBPF** בקובץ המתאים

ומעתיקים אותם לתאים C3 ו E3 בגיליון **Results** בקובץ **Calculations**

בהתאמה. אחר מעתיקים את התאים E3 ו C3 בגיליון **Results** לתאים C4:C123

ו E4:E123 בגיליון **Results** ומקבלים את פונקציות השרידות החד-ממדיות של

$$(K_1, K_2)$$

הצגת פונקציות ההסתברות החד-ממדית בקובץ "Calculations":

חישוב בעזרת מטריצת ההסתברות הדו ממדית:

$$P(K_1 = r) = \sum_{c=0}^{\infty} P(K_1 = r, K_2 = c) = \sum_{c=0}^{\infty} \text{BPF}(r, c)$$

$$P(K_2 = c) = \sum_{r=0}^{\infty} P(K_1 = r, K_2 = c) = \sum_{r=0}^{\infty} \text{TBPF}(c, r)$$

אנו מסכמים את התאים B3:\$DR\$3 בגיליון **BPF** ובגיליון **TBPF** ומעתיקים אותם

לתאים F3 ו H3 בגיליון **Results**. אחר מעתיקים את שני התאים F3 ו H3 בגיליון

Results לתאים F4:F123 ו H4:H123 בגיליון **Calculations**.

פרופ' נפתלי לנגברג

חישוב בעזרת עמודות השרידות החד ממדית:

בתאים G3 ו I3 מחשבים את ערך ההסתברויות החד ממדיות בעזרת פונקציות

השרידות החד ממדיות ומעתיקים את שני תאים אלו לתאים G4:G123 ו I4:I123

בהתאמה בגיליון **Results**.

חישוב תוחלות והשונויות של K_1, K_2 :

בתאים BE4-BF4 נציג את התוחלות (בתאים BC2-BD2 נציג את התוחלות מחושבות

בדרך האלטרנטיבית בעזרת פונקצית השרידות השוליות).

חישוב שונויות K_1, K_2 :

בתאים BG4-BH4 נציג את השונויות (בתאים BG2-BH2 נציג את השונויות מחושבות

בדרך אלטרנטיבית-בעזרת מומנטים מסדר שנים).

חישוב ההסתברויות:

נפעיל את המאקרו **DoronAll** הכולל את ארבעת המאקרו Doron1-Doron4 (קיצור

למאקרו A:DoronAll) ונקבל בגיליון "**Probabilities**" את ההסתברויות הנדרשות.

בדוגמה הבאה נעשה שימוש בקובץ האקסל בשם "**Calculations**"

דוגמה ב- 04:

יהי (K_1, K_2) זוג מ.מ.י"ם בדידים המקבלים את הערכים $0,1,\dots,50$ בעלי פונקציות

שרידות דו ממדית הנתונה ב- "**דוגמה ב-01**". המשתנה K_1 מתאר את שארית אורך חיי

אישה כיום בת 60 שנה בשנים שלמות ו K_2 מתאר את שארית אורך חיי בעלה כיום בן 65

שנה בשנים שלמות.

נציג:

את ערכי מטריצת פונקציות השרידות הדו-ממדית המוחלפת,

את ערכי מטריצת פונקציות ההסתברות הדו-ממדית המוחלפת,

את פונקציות השרידות החד-ממדיות של המ.מ.י"ם K_1, K_2 ,

פרופ' נפתלי לנגברג

את תוחלות המ.מ.י"ם K_1, K_2 ,

את שונויות המ.מ.י"ם K_1, K_2 ,

את תוחלת מכפלת המ.מ.י"ם K_1, K_2 $(EK_1 \cdot K_2)$,

את השונות המשותפת של המ.מ.י"ם K_1, K_2 $(Cov(K_1, K_2))$,

את מקדם המתאם של המ.מ.י"ם K_1, K_2 $(\rho(K_1, K_2))$.

את ההסתברויות:

$$P(K_1 = K_2), P(K_1 > K_2), P(K_1 < K_2)$$

$$P(K_1 = r, K_2 = K_1), P(K_1 = r, K_2 < K_1), P(K_1 = r, K_1 < K_2)$$

פרוט דרך ההצגה:

(a) בעזרת הפעולה **Save As** ניצור מהקובץ **Calculations** את הקובץ

"דוגמה ב-04".

(b) מהקובץ "דוגמה ב-01" נעתיק מהגליונות **BPF** ו **BSFLOOKUP**

את התאים B3-AZ53 העתקת ערך לגליונות **BSF** ו **BPF** בקובץ

"דוגמה ב-04" בהתאמה. כתוצאה נקבל בקובץ "דוגמה ב-04"

את כל החישובים בהם אנו מעוניינים למעט חישוב ההסתברויות. אותן

נקבל על ידי הפעלת המאקרו **DoronAll**.

לסיום הסעיף נציג את סטטיסטי הסדר (**Order Statistics**) של זוג המ.מ.י"ם (K_1, K_2) המשחק

תפקיד חשוב בפוליסות ביטוח רבות של בני זוג.

סימונים:

(א) יהי $K_{[1]} = \text{Min}[K_1, K_2]$. מצוין את הערך המינימלי מבין שני המ.מ.י"ם K_1, K_2 ,

פרופ' נפתלי לנגברג

(ב) יהי $K_{[2]} = \text{Max}[K_1, K_2]$. מציינ את הערך המכסימלי מבין שני המי"ם K_1, K_2 ,

הערות:

(א) המשתנה הבדיד $K_{[1]}$ יכול למדוד ביחידות זמן שלמות את הזמן עד המוות הראשון מבין שני

בני זוג,

(ב) המשתנה הבדיד $K_{[2]}$ יכול למדוד ביחידות זמן שלמות את הזמן עד המוות השני מבין שני

בני זוג.

(ג) הזוג $(K_{[1]}, K_{[2]})$ הוא סטטיסטי הסדר של הזוג (K_1, K_2) .

(ד) נשים לב ש: $K_{[1]} \leq K_{[2]}$ וש $K_{[1]} + K_{[2]} = K_1 + K_2$,

(ה) פונקצית ההסתברות המשותפת של הזוג $(K_{[1]}, K_{[2]})$ נתונה על ידי:

(a) עבור $\infty > r > c \geq 0$:

$$P(K_{[1]} = r, K_{[2]} = c) = 0$$

(b) עבור $\infty > r \geq 0$:

$$P(K_{[1]} = r, K_{[2]} = r) = P(K_1 = r, K_2 = r)$$

(c) עבור $\infty > r < c \geq 0$:

$$P(K_{[1]} = r, K_{[2]} = c) = P(K_1 = r, K_2 = c) + P(K_1 = c, K_2 = r)$$

בקובץ בשם "OrderStatistics" נציג בעזרת מטריצת ההסתברות הדו-ממדית של זוג

המ.מ.י"ם (K_1, K_2) את מטריצת ההסתברות הדו-ממדית ומטריצת השרידות הדו-ממדית

פרופ' נפתלי לנגברג

של סטטיסטי הסדר $(K_{[1]}, K_{[2]})$. (כך שעל ידי "השתלת" מטריצת הפרמטרים נקבל מידית

את מטריצת השרידות הדו ממדית של זוג המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$, שנסמנה ב- **BSFO**, את

מטריצת ההסתברות הדו ממדית של זוג המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$, שנסמנה ב- **PBFO**, ואת

מטריצת ההסתברות הדו ממדית המוחלפת של זוג המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$ שנסמנה

ב- **TPBFO**).

את מטריצת ההסתברות הדו ממדית של זוג המ.מ.י"ם (K_1, K_2) נסמן על ידי **BPF(K(1),K(2))**

ואת מטריצת ההסתברות הדו ממדית המוחלפת של זוג המ.מ.י"ם (K_1, K_2) נסמן על ידי

TBPF(K(1),K(2)). נסיים את הדיון בסטטיסטי הסדר בדוגמה.

דוגמה ב- 05:

יהי (K_1, K_2) זוג מ.מ.י"ם בדידים המקבלים את הערכים $0, 1, \dots, 60$ בעלי פונקצית

הסתברות דו ממדית הנתונה ב- "**דוגמה ב-02**". המשתנה K_1 מתאר את שארית אורך חיי

אישה כיום בת 30 שנה בשנים שלמות ו K_2 מתאר את שארית אורך חיי אחיה כיום בן 35

שנה בשנים שלמות.

בעזרת הקבצים Calculations\ OrderStatistics נחשב את:

את פונקצית השרידות המשותפת של המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$,

את פונקצית ההסתברות המשותפת של המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$,

את פונקציות השרידות השוליות של המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$.

את תוחלות המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$,

את שונויות המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$

פרופ' נפתלי לנגברג

את תוחלת מכפלת המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$ $(EK_{[1]} \cdot K_{[2]})$,

את השונות המשותפת של המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$ $(Cov(K_{[1]}, K_{[2]}))$,

את מקדם המתאם של המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$ $(\rho(K_{[1]}, K_{[2]}))$.

הצגת מטריצת השרידות וההסתברות של סטטיסטי הסדר:

(a) בעזרת הפעולה **Save As** ניצור מהקובץ **OrderStatistics** קובץ זמני

בשם "**OrderStatistics05**".

(b) מהקובץ "**דוגמה ב-VBA02**" נעתיק מהגיליון **BPF** את התאים

B3-BJ63 העתקת ערך לגיליון **BPF(K(1),K(2))** בקובץ

"**OrderStatistics05**". לכן נקבל בקובץ "**OrderStatistics05**" את

מטריצת השרידות הדו ממדית של זוג המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$, את

מטריצת ההסתברות הדו ממדית של זוג המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$ ואת

מטריצת ההסתברות הדו ממדית המוחלפת של זוג המ.מ.י"ם $(K_{[1]}, K_{[2]})$.

הצגת חישובי גדלים בסטטיסטי הסדר:

(a) בעזרת הפעולה **Save As** ניצור מהקובץ **Calculations** את הקובץ

"**דוגמה ב-05**".

(b) מהקובץ "**OrderStatistics05**" נעתיק מהגיליונות **BSFO** ו **BPFO**

את התאים **B3-DR123** העתקת ערך לגיליונות **BSF** ו **BPF** בקובץ

"**דוגמה ב-05**" בהתאמה. כתוצאה נקבל בקובץ "**דוגמה ב-05**"

את כל החישובים בהם אנו מעוניינים למעט חישוב ההסתברויות. אותן

נקבל על ידי הפעלת המאקרו **DoronAll**.