פרק א: מודלים של ריבית

בפרק זה נציג שלושה מודלים:

(א) מודל ריבית קבועה,

(ב) מודל ריבית קבועה למקוטעין,

(ג) מודל ריבית כללי.

הערה:

מודל ריבית קבועה הוא מקרה פרטי של מודל ריבית קבועה למקוטעין, ומודל הריבית קבועה למקוטעין הוא מקרה פרטי של מודל ריבית כללי.

מודל ריבית קבועה עם ריבית i% ליחידת זמן

הגדרה:

ב**מודל ריבית קבועה עם ריבית i% ליחידת זמן** הפקדת C יחידות כסף לתקופה של t יחידות זמן מניבה בסוף תקופת ההפקדה $C\cdot(1+i)^t$ יחידות כסף.

הערות:

(א) יחידת זמן יכולה להיות, בין היתר, שנה, רבעון, חודש, שבוע, או שלוש שנים,

(ב) בהגדרת מודל ריבית קבועה t יכול להיות כל מספר ממשי אי שלילי,

(ג) את הפתרונים של הדוגמאות בכל אחד מפרקי הקורס נציג בגיליון אלקטרוני.

דוגמה 1:

לקוח מפקיד 5,000 ש"ח ל- 10 שנים. חשב את שווי החסכון בתום תקופת החסכון במודל ריבית קבועה בכל אחד מהמקרים הבאים:

(א) התשואה השנתית שווה ל- 4.5%,

(ב) התשואה לשנתיים (דו-שנתית) שווה ל- 12%,

(ג) התשואה לחצי שנה (החצי-שנתית) שווה ל- 3.5%.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 1"** בגיליון בשם **"דוגמה 1 "**.

(א)

זמן ההפקדה	סכום ההפקדה	תשואה ליחידת זמן	יחידת הזמן
10	5000	4.5%	שנה

על פי ההגדרה שווי ההפקדה הוא $5000\cdot1.045^{10}$. בתא B3 נרשום: $=5000*1.045\text{^}10$

נלחץ על Enter ונקבל את התוצאה.

(ב)

זמן ההפקדה	סכום ההפקדה	תשואה ליחידת זמן	יחידת הזמן
5	5000	12%	שנתיים

על פי ההגדרה שווי ההפקדה הוא $5000\cdot1.12^{5}$. בתא B4 נרשום: $=5000*1.12\text{^}5$

נלחץ על Enter ונקבל את התוצאה.

(ג)

זמן ההפקדה	סכום ההפקדה	תשואה ליחידת זמן	יחידת הזמן
20	5000	3.5%	חצי- שנה

על פי ההגדרה שווי ההפקדה הוא $5000\cdot1.035^{20}$. בתא B5 נרשום: $=5000*1.035\text{^}20$,

נלחץ על Enter ונקבל את התוצאה.

הערה:

במודל ריבית קבועה ניתן לעבור מתשואה ביחידת זמן אחת לתשואה שקולה ביחידת זמן

אחרת כפי שנראה בדוגמה הבאה.

דוגמה 2:

(א) מהי התשואה החודשית השקולה לתשואה חצי שנתית של 6%,

(ב) מהי התשואה לשלושה חודשים (הרבעונית) השקולה לתשואה שנתית של 10%,

(ג) מהי התשואה לחודשים (הדו-חודשית) השקולה לתשואה לשלושה חודשים (רבעונית) של 2%,

(ד) מהי התשואה השבועית השקולה לתשואה ארבע-חודשית של 6%, (הנח שבשנה 52 שבועות),

(ה) מהי התשואה היומית השקולה לתשואה חצי שנתית של 6%, (הנח שבשנה 365 ימים).

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 1"** בגיליון בשם **"דוגמה 2 "**.

(א)

השווי של הפקדת 1 ש"ח לחצי- שנה במודל ריבית קבועה עם ריבית חודשית i% שווה ל- $(1+i)^6$,

השווי של הפקדת 1 ש"ח לחצי- שנה במודל ריבית קבועה עם ריבית חצי- שנתית של 6% שווה ל 1.06.

בכדי שהריבית החודשית i תהיה שקולה לריבית החצי- שנתית השווה ל- 6% חייבים להיות שווים ערכי הפקדה לחצי- שנה של 1 ש"ח בשני המודלים. לכן:

$(1+i)^6 = 1.06$ או באופן שקול: $i = 1.06^{\frac{1}{6}} - 1$.

בתא B2 נרשום: $=1.06\text{^}(1/6)-1$ ונלחץ Enter ונקבל את התוצאה.

(ב)

השווי של הפקדת 1 ש"ח לשנה במודל ריבית קבועה עם ריבית רבעונית i% שווה

ל- $(1+i)^4$,

השווי של הפקדת 1 ש"ח שנה במודל ריבית קבועה עם ריבית שנתית של 10% שווה

ל- 1.1.

בכדי שהריבית הרבעונית i תהיה שקולה לריבית השנתית השווה ל- 10% חייבים

להיות שווים ערכי ההפקדה לשנה של 1 ש"ח בשני המודלים . לכן: $(1+i)^4 = 1.1$ או

באופן שקול: $i = 1.1^{\frac{1}{4}} - 1$.

בתא B3 נרשום: $=1.1\text{^}(1/4)-1$ ונקבל את התוצאה.

(ג)

השווי של הפקדת 1 ש"ח לחצי-שנה במודל ריבית קבועה עם ריבית דו-חודשית i%

שווה ל $(1+i)^3$,

השווי של הפקדת 1 ש"ח לחצי-שנה במודל ריבית קבועה עם ריבית תלת- חודשית של 2%

שווה ל 1.02^2.

בכדי שהריבית הדו- חודשית i תהיה שקולה לריבית התלת חודשית השווה ל- 2% חייבים

להיות שווים ערכי ההפקדה לחצי- שנה של 1 ש"ח בשני המקרים. לכן: $(1+i)^3 = 1.02^2$ או

באופן שקול: $i = 1.02^{\frac{2}{3}} - 1$. בתא B4 נרשום: $=1.02\text{^}(2/3)-1$ ונקבל את התוצאה.

(ד)

השווי של הפקדה 1 ש"ח ל- $\frac{52}{3}$ שבועות במודל ריבית קבועה עם ריבית שבועית i% שווה

ל $(1+i)^{\frac{52}{3}}$,

השווי של הפקדה 1 ש"ח ל- $\frac{52}{3}$ שבועות (או ארבע חודשים) במודל ריבית קבועה עם

ריבית ארבע- חודשית של 6 % שווה ל-1.06.

בכדי שהריבית השבועית i תהיה שקולה לריבית הארבע חודשית השווה ל- 6% חייבים

להיות שווים ערכי הפקדה ל- $\frac{52}{3}$ שבועות של 1 ש"ח בשני המודלים. לכן:

$(1+i)^{\frac{52}{3}} = 1.06$ או באופן שקול: $i = 1.06^{\frac{3}{52}} - 1$. בתא B5 נרשום: $=1.06\text{^}(3/52)-1$

ונקבל את התוצאה.

(ה)

השווי של הפקדה 1 ש"ח ל- 182.5 ימים במודל ריבית קבועה עם ריבית יומית i% שווה

ל- $(1+i)^{182.5}$,

השווי של הפקדה 1 ש"ח ל- 182.5 ימים (או חצי שנה) במודל ריבית קבועה עם ריבית

חצי- שנתית של 6% שווה ל-1.06.

בכדי שהריבית היומית i תהיה שקולה לריבית החצי- שנתית השווה ל- 6% חייבים להיות

שווים ערכי ההפקדה ל- 182.5 ימים של 1 ש"ח בשני המודלים. לכן: $(1+i)^{182.5} = 1.06$

או באופן שקול: $i = 1.06^{\frac{1}{182.5}} - 1$. בתא B6 נרשום: $=1.06\text{^}(1/182.5)-1$ ונקבל את

התוצאה .

הערה:

לפני ההגדרה הפורמלית של המושג **גורם ההיוון** נציג שתי דוגמאות.

דוגמה 3:

מהו הסכום שעל לקוח להפקיד בתחילת התקופה על מנת לקבל בסוף התקופה במודל ריבית קבועה עם ריבית שנתית השווה ל 6% 1,000 ש"ח בכל אחד מהמקרים הבאים:

(א) תקופת ההפקדה שווה לשנה,

(ב) תקופת ההפקדה שווה לחצי שנה,

(ג) תקופת ההפקדה שווה לשלוש ורבע שנים.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 1"** בגיליון בשם **"דוגמה 3 "**.

יהי $v \equiv \frac{1}{1.06}$ גורם ההיוון. בתא B2 נרשום : $=1.06$^-1

(א)

יהי x הסכום שהפקיד הלקוח לשנה אז: $x \cdot 1.06 = 1000$ ולכן:

$x = 1000 \cdot \frac{1}{1.06} = 1000 \cdot v$. בתא B4 נרשום: $=1000*B2$ ונקבל את התוצאה.

(ב)

יהי x הסכום שהפקיד הלקוח לחצי שנה אז: $x \cdot 1.06^{0.5} = 1000$ ולכן:

$x = 1000 \cdot (\frac{1}{1.06})^{0.5} = 1000 \cdot v^{0.5}$. בתא B5 נרשום: $=1000*B2$^0.5

ונקבל את התוצאה.

(ג)

יהי x הסכום שהפקיד הלקוח לשלוש ורבע שנים אז: $x \cdot 1.06^{3.25} = 1000$ ולכן:

$x = 1000 \cdot v^{3.25}$. בתא B6 נרשום: $=1000*B2$^3.25 ונקבל את התוצאה.

הגדרה:

במודל ריבית קבועה עם ריבית i ליחידת זמן $v \equiv \frac{1}{1+i}$, (או **v(1)**), נקרא **גורם ההיוון** ליחידת הזמן.

הערות:

יהי נתון מודל ריבית קבועה עם ריבית i ליחידת זמן אז:

(א) v היא כמות הכסף שצריך להפקיד בתחילת יחידת הזמן על מנת לקבל בסוף יחידת הזמן יחידת כסף אחת, או אלטרנטיבית: הערך בתחילת יחידת הזמן של יחידת כסף שתשולם בסוף יחידת הזמן שווה ל v.

(ב) לקבל v יחידות כסף בתחילת יחידת הזמן שקול לקבלת יחידת כסף אחת בסוף יחידת הזמן.

(ג) יהי t מספר ממשי אי שלילי ויהי **v(t)** מספר יחידות הכסף שצריך להפקיד בתחילת יחידת הזמן על מנת לקבל לאחר t יחידות זמן יחידת כסף אחת. במודל ריבית קבועה מתקיים השיויון: $v(t)=v^t$, (כי $v(t)\cdot(1+i)^t = v(t)\cdot v^t = 1$).

מודל ריבית קבועה למקוטעין

ראשית נציג דוגמה למודל ריבית קבועה למקוטעין.

דוגמה 4:

לקוח מפקיד בתוכנית חסכון 5,000 ש"ח ל- 10 שנים. בשנתיים הראשונות התשואה השנתית שמקבל הלקוח שווה ל- 4% , בחמש השנים העוקבות התשואה השנתית שהלקוח מקבל שווה ל 5%, ובשלוש השנים האחרונות התשואה השנתית שהלקוח מקבל שווה ל 6%.

(א) חשב את ערך החסכון המצטבר בעת הפירעון,

(ב) מצא את מודל הריבית הקבועה עם ריבית שנתית בגובה i% בו ערך החיסכון בסוף תקופת ההפקדה יהיה שווה לגודל שהתקבל ב (א), (כלומר מצא מודל ריבית שנתית

קבועה שקולה)

(ג) חשב את $v(5.5)$: הערך הנוכחי של יחידת כסף שתשולם בזמן t=5.5,

(ד) חשב את $v(8.5)$: הערך הנוכחי של יחידת כסף שתשולם בזמן t=8.5.

(ה) חשב את הפונקציה $v(t)$ עבור $t = 0, 0.5, 1, \ldots, 10$,

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 1"** בגיליון בשם **"דוגמה 4 "**.

(א)

(i) במודל ריבית שנתית קבועה של 4% ערך הפקדת 5,000 ש"ח לשנתיים שווה ל:

$5,000 \cdot 1.04^2$ ש"ח.

(ii) הערך של $5,000 \cdot 1.04^2$ ש"ח שהופקדו לחמש שנים, במודל ריבית שנתית

קבועה של 5% שווה ל: $[5,000 \cdot 1.04^2] \cdot 1.05^5$ ש"ח.

(iii) הערך של $5,000 \cdot 1.04^2 \cdot 1.05^5$ ש"ח, שהופקדו לשלוש שנים, במודל ריבית

שנתית קבועה של 6% שווה ל: $[5,000 \cdot 1.04^2 \cdot 1.05^5] \cdot 1.06^3$ ש"ח.

מכאן שערך החיסכון בעת הפירעון (שהופקדו בתחילה לשנתיים אחר כך לחמש שנים נוספות ובסוף לשלוש שנים נוספות) שווה ל: $5,000 \cdot 1.04^2 \cdot 1.05^5 \cdot 1.06^3$ ש"ח. בתא B2 נרשום: $= 5000 * 1.04\wedge 2 \cdot 1.05\wedge 5 * 1.06\wedge 3$ ונקבל את התוצאה.

(ב)

תהי i הריבית במודל ריבית קבועה השקולה למודל הריבית הקבועה למקוטעין הנתונה, אז ערך הפיקדון בעת הפירעון במודל הריבית המקורי ובודל הריבית הקבועה שווים. לכן:

$$5,000 \cdot 1.04^2 \cdot 1.05^5 \cdot 1.06^3 = 5,000 \cdot (1 + i)^{10}$$

או:

$$i = [1.04^2 \cdot 1.05^5 \cdot 1.06^3]^{0.1} - 1 .$$

בתא B3 נרשום: $(B2/5000)^{\wedge}0.1-1=[1.04^{\wedge}2 \cdot 1.05^{\wedge}5*1.06^{\wedge}3]^{\wedge}0.1-1$ ונקבל את התוצאה.

(ג)

(i) במודל ריבית שנתית קבועה של 5% הערך בזמן 2 של 1 ש"ח שישולם בזמן 5.5 שווה ל: $1.05^{-3.5}$,

(ii) במודל ריבית שנתית קבועה של 4% הערך בזמן 0 של $1.05^{-3.5}$ ש"ח שישולמו בזמן 2 שווה ל: $[1.05^{-3.5}] \cdot 1.04^{-2}$.

לכן הערך בזמן אפס של יחידת כסף שתשולם בזמן 5.5 שווה ל: $1.05^{-3.5} \cdot 1.04^{-2}$. בתא B4: נרשום 2-^1.05^-3.5*1.04= ונקבל את התוצאה.

(ד)

(i) במודל ריבית שנתית קבועה של 6% הערך בזמן 8.5 של 1 ש"ח שישולם בזמן 7 שווה ל: $1.06^{-1.5}$,

(ii) במודל ריבית שנתית קבועה של 5% הערך בזמן 2 של $1.06^{-1.5}$ ש"ח שישולמו בזמן 7 שווה ל: $[1.06^{-1.5}] \cdot 1.05^{-5}$.

(iii) במודל ריבית שנתית קבועה של 4% הערך בזמן 0 של $[1.05^{-1.5}] \cdot 1.04^{-5}$ ש"ח שישולמו בזמן 2 שווה ל: $[1.06^{-1.5} \cdot 1.05^{-5}] \cdot 1.04^{-2}$.

לכן הערך הנוכחי של יחידת כסף שתשולם בזמן 8.5 שווה ל: $1.06^{-1.5} \cdot 1.05^{-5} \cdot 1.04^{-2}$.

בתא B5 נרשום: 2-^1.06^-1.5*1.05^-5*1.04= ונקבל את התוצאה.

(ה)

בתא D2 נרשום 0, בתא B3 נרשום B2+0.5= ונעתיק אותו לתאים D4-D22. כתוצאה נקבל בתאים D2-D22 את הזמנים $0, 0.5, 1, \ldots, 10$.

בתאים E2-E22 נציג את הפונקציה v(t) עבור $t = 0, 0.5, 1, \ldots, 10$.

שלב א:

עבור $0 \le t \le 2$ מודל הריבית הוא קבוע עם ריבית שנתית השווהל- 4%, מכאן עבור $0 \le t \le 2$ $v(t) = 1.04^{-t}$. לכן בתא E2 נרשום: 1.04^(-D2)= ונעתיק את התא לתאים E3-E6.

שלב ב:

עבור $2 \le t \le 7$ מודל הריבית הוא קבוע עם ריבית שנתית השווהל- 5%, לכן ערך 1 ₪ המשולם בזמן t, $2 \le t \le 7$, שווה בזמן 2 ל- 1.05^{2-t} ₪, וערכם של 1.05^{2-t} ₪ המשולמים בזמן 2 שווה בזמן 0 ל- $1.04^{-2} \cdot 1.05^{2-t}$. לכן בתא E7 נרשום: (1.04^(-2)*1.05^(2-D7= ונעתיק את התא לתאים E8-E16.

שלב ג:

עבור $t > 7$ מודל הריבית הוא קבוע עם ריבית שנתית השווהל- 6%, לכן ערך 1 ₪ המשולם בזמן t, $t > 7$, שווה בזמן 7 ל- 1.06^{7-t} ₪, וערכם של 1.06^{7-t} ₪ המשולמים בזמן 7 שוה בזמן 2 ל- $1.05^{-5} \cdot 1.06^{7-t}$ ש"ח, ערכם של $1.06^{7-t} \cdot 1.05^{-5}$ ₪ המשולמים בזמן 2 שווה בזמן 0 ל- $1.04^{-2} \cdot 1.05^{-5} \cdot 1.06^{7-t}$ ₪. לכן בתא E17 נרשום:

(1.04^(-2)*1.05^(-5)*1.06^(7- D17= $E$16*1.06^(7-D17)

ונעתיק את התא לתאים E18-E22.

הערה:

לאחר שחשבנו את הפונקציה v(t) ניתן לחשב ביותר קלות את החלקים (א)-(ד).

(א):

יהי x הערך המבוקש, אז: $x \cdot v(10) = 5{,}000$, ולכן $x = \frac{5{,}000}{v(10)}$. בתא H2 נרשום:

=5000/E22 ונקבל את התוצאה.

(ב):

תהי i הריבית המבוקשת, אז: $(1+i)^{-10} = v(10)$, לכן: $i = v(10)^{-0.1} - 1$. בתא H3

נרשום: $= E22 \wedge (-0.1) - 1$ ונקבל את התוצאה.

(ג):

נרשום בתא H4: =E13 ונקבל את התוצאה.

(ד):

נרשום בתא H5: =E19 ונקבל את התוצאה.

הגדרה: (מודל ריבית קבועה למקוטעים)

יהיו $i_1,\ldots,i_k,i_{k+1}$ מספרים אי שליליים, ויהיו $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = \infty$

מספרים ממשיים אי שליליים. **מודל ריבית קבועה למקוטעין** הוא מודל ריבית בו

התשואה ליחידת זמן במרוח $[t_{r,-1}, t_r)$ שווה ל- i_r , $r = 1,\ldots k+1$.

מודל ריבית כללי

הגדרה:

תהי δ פונקציה אי שלילית המוגדרת על הקרן $[0,\infty)$. נאמר שיש לנו מודל ריבית- δ

שנתי אם בתמורה להפקדת C יחידות כסף בזמן 0 ל t יחידות זמן יקבל המפקיד בזמן t

$C \cdot e^{\int_0^t \delta(u)du}$ יחידות כסף.

הערות:

(א) אם δ היא פונקציה קבועה ($(\delta(u)\equiv c)$ אז מודל ריבית- δ שנתי הוא מודל ריבית

קבועה שנתית עם ריבית השווה ל- $e^{\delta}-1$,

(ב) אם δ היא פונקצית מדרגות על קטעים אז מודל ריבית- δ שנתי הוא מודל ריבית שנתית

קבועה למקוטעין.

סימון:

יהי **v(t)** הערך בזמן 0 של יחידת כסף אחת שתשולם בזמן t מחושב במודל ריבית δ.

הערות:

(א) מאחר ו $e^{\int_0^t \delta(u)du} \cdot e^{-\int_0^t \delta(u)du} = 1$ הרי שבמודל ריבית- δ שנתי מתקיים:

$$v(t) \equiv e^{-\int_0^t \delta(u)du} ,$$

(ב) יהי B השווי בזמן s של הפקדת C יחידות כסף בזמן t, $0 \le t \le s$. אנו מעונינים למצוא

את הקשר בין B לבין C במודל ריבית- δ שנתי. B שקול במודל ריבית- δ שנתי

להפקדת $B \cdot v(s)$ יחידות כסף בזמן 0, ו C שקול להפקדת $C \cdot v(t)$ יחידות כסף זמן 0.

לכן $B \cdot v(s) = C \cdot v(t)$. מכאן:

$$B = C \cdot \frac{v(t)}{v(s)} = C \cdot \frac{e^{-\int_0^t \delta(u)du}}{e^{-\int_0^s \delta(u)du}} = C \cdot e^{\int_t^s \delta(u)du} .$$

מסקנות:

(א) $C\cdot e^{\int_t^s \delta(u)du}$ הוא הערך בזמן s של הפקדת C יחידות כסף בזמן t,

(ב) $B\cdot e^{-\int_t^s \delta(u)du}$ הוא הערך בזמן t של B יחידות כסף שישולמו בזמן s.

דוגמה 5:

תהי $\delta(u)=0.05+0.001\cdot u$. חשב במודל ריבית - δ שנתי את הגדלים הבאים:

(א) יחידת כסף אחת הופקדה בזמן t=2 . חשב את הצטברות יחידת הכסף בזמן s=3.

(ב) בזמן t=4.5 תשולם יחידת כסף אחת. חשב את הערך של יחידת הכסף זו בזמן t=2.

(ג) חשב את הפונקציה v(t) עבור $t=0,0.5,1,\ldots,10$.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 1"** בגיליון בשם **"דוגמה 5 "**.

ראשית נשים לב ש:

$$\int_t^s \delta(u)du=\int_t^s [0.05+0.001\cdot u]du=0.05\cdot(s-t)+0.0005\cdot(s^2-t^2).$$

(א)

על פי ההערה האחרונה חלק (ב) ההצטברות של יחידת כסף אחת בזמן s=3 שהופקד

בזמן t=2 שווה ל: $e^{\int_2^3 \delta(u)du}=e^{0.05+0.005\cdot 5}.$

בתא B2 נרשום: =exp(0.05+0.0005*5) ונקבל את התוצאה.

(ב)

על פי ההערה האחרונה הערך בזמן t=2 של 1 ש"ח שישולם בזמן t=4.5 שווה ל:

$$e^{-\int_{2}^{4.5} \delta(u)du} = e^{-0.05\cdot 2.5 - 0.0005\cdot(4.5^2-4)}.$$

בתא B3 נרשום: $=\exp(-0.05*2.5-0.0005*(4.5\wedge 2-4))$ ונקבל את התוצאה.

(ג)

בתא D2 נרשום 0, בתא D3 נרשום D2+0.5= ונעתיק אותו לתאים D4-D22.

כתוצאה נקבל בתאים D2-D22 הזמנים $0, 0.5, 1, \ldots, 10$.

בתאים E2-E22 נציג את הפונקציה v(t) עבור $t = 0, 0.5, 1, \ldots, 10$. מאחר ו:

$$v(t) = e^{-\int_0^t (0.05+0.001\cdot u)du} = e^{-0.05\cdot t - 0.0005\cdot t^2}$$

נרשום בתא E2:

=exp(-0.05*D2-0.0005*D2^2) ונעתיק את התא לתאים E3-E22.

הערה:

לאחר שחשבנו את הפונקציה v(t) ניתן לחשב ביתר קלות את החלקים (א), ו (ב).

(א) התוצאה המבוקשת שווה ל: $\frac{v(2)}{v(3)}$ לכן נרשום בתא H2: E6/E8=

(ב) התוצאה המבוקשת שווה ל: $\frac{v(4.5)}{v(2)}$ לכן נרשום בתא H3: E11/E6 .

דוגמה 6:

יהי N משתנה מיקרי המקבל את הערכים $1,2,\ldots,10$. ההסתברות שהמשתנה N יקבל את הערך k , $k = 1,2,\ldots,10$, שווה ל:

$$P(N=k)=\frac{0.3^k\cdot 0.7^{10-k}}{\sum_{r=1}^{10}0.3^r\cdot 0.7^{10-r}}$$

(א) חשב את ההסתברות של המשתנה N להיות שווה ל- k עבור $k=1,2,\ldots,10$,

(ב) חשב את ההסתברות של המשתנה N להיות קטן או שווה ל- k עבור $k=1,2,\ldots,10$,

לקוח מפקיד 15,000 ₪ לתקופה השווה למשתנה N ומשיג תשואה שנתית השווה ל- 9% .

יהי A(r) הערך המצטבר של הפקדון לאחר r שנים.

(ג) חשב את ערכי A(r) עבור $r=1,2,\ldots,10$,

(ד) חשב את תוחלת המשתנה A(N), (שנסמנה ב- **EA(N)**)

(ה) חשב את שונות המשתנה A(N),

(ו) חשב את ההסתברות שהערך המצטבר של הפיקדון יהיה לפחות 23,000 ₪.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 1"** בגיליון בשם **"דוגמה 6 "**.

בתאים A4-A13 נציג את ערכי המשתנה N, בתאים B4-B13 נחשב את הערכים:

$0.3^k\cdot 0.7^{10-k}$ ובתא B14 נסכם את הערכים שבתאים B4-B13.

(א)

בתאים D4-D13 נחשב את ההסתברויות המבוקשות. בתא D4 נרשום: =B4/$B$14

ונעתיק את התא D4 לתאים D5-D13.

הערה:

מאחר ואנו רוצים לחלק בכל אחד מעשרת חישובי ההסתברות באותו הסכום אנו

מקבעים את התא B14 בו מופיע הסכום על ידי הוספת הסימן $ לפני האות B

(מקבע את העמודה להיות תמיד B) ועל ידי הוספת הסימן $ לפני המספר 14

(מקבע את השורה להיות תמיד מספר 14).

לצורך בדיקה נסכם בתא D14 את ערכי ההסתברות שקבלנו לראות שאכן הם מסתכמים ל-1 כפי שהם צפויים להסתכם.

(ב)

ההסתברות שהמשתנה N קטן או שווה ל- k שווה לסכום ההסתברויות שהמשתנה N שווה ל- r עבור ערכי r מ- 1 ועד k (כולל k).

על מנת לחשב את ההסתברות שהמשתנה N קטן או שווה ל- 1 נרשום בתא F4:

=sum($D$4:D4) ונעתיק את התא לתאים F5-F13.

הערה:

נשים לב שגם בחלק זה אנו מקבעים תא במקרה זה הוא התא D4.

ראוי להעיר שבתא F13 נקבל את הערך 1 (כי המשתנה N בודאוות קטן או שווה ל- 10).

(ג)

ההצטברות של 15,000 ₪ לאחר r שנים בריבית שנתית השווה ל- 9% שווה

ל- $15{,}000 \cdot 1.09^{r}$. לכן נרשום בתא H4: =15000*1.09^A4 ונעתיק את התא H4 לתאים H5-H13.

(ד)

התוחלת של המשתנה A(N) שווה ל: $\sum_{r=1}^{10} A(r) \cdot P(N=r)$. בתא J4 נרשום: =H4*D4

ונעתיק את התא J4 לתאים J5-J13. בתא J2 נסכם את הערכים שבתאים J4-J13 ונקבל את הערך המצטבר הממוצע (כלומר את תוחלת A(N)).

(ה)

השונות של המשתנה A(N) שווה ל: $\sum_{r=1}^{10} [A(r) - EA(N)]^{2} \cdot P(N=r)$. בתא L4

נרשום: =D4*(H4-$J$2)^2 ונעתיק את התא L4 לתאים L5-L13. בתא L2 נסכם את

הערכים שבתאים L4-L13 ונקבל את השונות המבוקשת.

הערה:

בנוסחת השונות אנו מפחיתים מערך המשתנה את ערך תוחלתו ולכן אנו מקבעים את בתא בו חושבה התוחלת כלומר את התא J2.

(ו)

בתא O4 נרשום: =IF(H4>=23000,D4,0) (כלומר: אם הערך בתא H4 גדולל או שווה ל- 23,000 רשום את הערך שבתא D4 אחרת רשום 0). את התא O4 נעתיק לתאים O5-O13. ובתא O2 נסכם את הערכים שבתאים O4-O13 ונקבל את ההסתברות המבוקשת.

דוגמה 7:

לקוח מפקיד 20,000 ₪ לתקופה של 15 שנה. הריבית השנתית I לפיה מחושב הפקדון נקבעת בעת ההפקדה. הריבית I מקבלת את הערכים 10%, 8%, ו 5% בהסתברויות 0.15, 0.25, ו 0.60 בהתאמה (הריבית 5% מתקבלת בהסתברות 0.6). יהי A(i) הערך המצטבר של הפקדון שחושב לפי תשואה שנתית השווה ל- i%

(א) חשב את ערכי A(i) עבור i=5,8,10,

(ב) חשב את תוחלת המשתנה A(i),

(ג) חשב את סטית התקן של המשתנה A(i),

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 1"** בגיליון בשם **"דוגמה 7 "**.

בתאים B5-B7 נציג את שלושת הריביות ובתאים A5-A7 נציג את ההסתברויות המתאימות לריביות אלו.

(א)

בתא D5 נחשב את ההצטברות של 20,000 ₪ לפי ריבית שנתית של 5% ל- 15 שנה

ונרשום: 20,000*B5^15= ונעתיק את התא לתאים D6-D7,

(ב)

בתא F5 נחשב את מכפלת שווי הצטברות 20,000 הש"ח (הנתונה בתא D5) בהסתברות המתאימה (הנתונה בתא A5) ונעתיק את התא לתאים F6-F7. בתא F2 נקבל את התוחלת המבוקשת,

(ג)

לחישוב סטית התקן נשתמש בהגדרת השונות ונרשום בתא H5: =A5*(D5-$F$2)^2 ונעתיק את התא לתאים H6-H7. בתא H2 נרשום: =sum(H5:H7)^0.5 ונקבל את סטית התקן המבוקשת.