פרופ' נפתלי לנגברג

סעיף א:

משתנים מיקרים (מ.מי"ם) בדידים חד מימדיים

סימון:

K מציין משתנה מיקרי (**מ.מ**) בדיד המקבל את הערכים $0,1,2,\ldots$.

הערות:

(א) המ.מ. הבדיד K יכול לתאר את אורך החיים המיקרי של נפש הנמדד ביחידות זמן שלמות. ניתוח אורך החיים שללקוח הרוכש ביטוח, ולכן של המ.מ. K, הוא בעל עניין מרכזי במדעי האקטוארייה.

(ב) המ.מ. הבדיד K נקבע על ידי **פונקצית ההסתברות החד-ממדית P(K=k)**, $k=0,1,2,\ldots$, **(Univariate Probability Function- UPF)**:

(ג) עבור $k=0,1,2,\ldots$ מתקיימים השיוויונים הבאים:

$$P(K \geq k) = \sum_{r=k}^{\infty} P(K=r),$$

$$P(K=k) = P(K \geq k) - P(K \geq k+1).$$

לכן המ.מ. הבדיד K נקבע גם על ידי הפונקציה: $P(K \geq k)$, $k=0,1,2,\ldots$, הנקראת **פונקצית השרידות** החד-ממדית של המ.מ. K (**Univariate Survival Function- USF**)

(ד) ווקטור ההסתברות $\{P(K=r)\}$ או ווקטור השרידות $\{P(K>=r)\}$ יכול לשמש כווקטור פרמטרים הקובע הסתברותית את המ.מ. K. לצורך ניתוח המ.מ. K נחשב את ווקטור ההסתברות או את ווקטור השרידות (רצוי לחשב את שניהם).

(ה) **תוחלת** המ.מ. K (סימון: **EK**) נתונה על ידי:

$$EK = \sum_{r=0}^{\infty} r \cdot P(K=r),$$

פרופ' נפתלי לנגברג

(ו) נוסחה אלטרנטיבית לחישוב תוחלת המ.מ. K בעזרת פונקצית השרידות:

$$EK = \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot P(K=r) = \sum_{r=1}^{\infty} [\sum_{j=1}^{r} 1] \cdot P(K=r)$$

על ידי החלפת סדר הסכימה נקבל את הנוסחה האלטרנטיבית לחישוב התוחלת בעזרת פונקצית השרידות:

$$EK = \sum_{j=1}^{\infty} [\sum_{r=j}^{\infty} P(K=r)] = \sum_{j=1}^{\infty} P(K \geq j)$$

(ז) שונות המ.מ. K (סימון: $Var(K)$ או σ_K^2) נתונה על ידי:

$$. Var(K) \equiv \sigma_K^2 = \sum_{r=0}^{\infty} (r - EK)^2 \cdot P(K=r)$$

(ח) המומנט השני של המ.מ. K (סימון: EK^2) נתון על ידי:

$$. EK^2 = \sum_{r=0}^{\infty} r^2 \cdot P(K=r)$$

(ט) נוסחת אלטרנטיבית לחישוב שונות המ.מ. K בעזרת המומנט השני:

$$Var(K) \equiv \sigma_K^2 = EK^2 - (EK)^2$$

דוגמה א- 01:

יהי **K** מ.מ. המתאר את יתרת השנים השלמות שתחיה נפש כיום בת 40.

בקובץ **"דוגמה א- 01"** בעמודה A נתונים ערכי המ.מ.K ובעמודה B נתון ווקטור ההסתברות של המ.מ. K.

הערה:

על מנת לבדוק את נכונות ההצגה של ווקטור ההסתברות אנו מסכמים בתא B6 את ההסתברויות שבעמודה B. אם התוצאה המתקבלת בתא B6 היא 1 יש להניח שהצגת ווקטור ההסתברות נכונה.

ראשית נציג בעמודה **C** את ווקטור ה**שרידות** של המ.מ.K.

פרופ' נפתלי לנגברג

עתה נחשב:

את **תוחלת** המ.מ.K,

את **שונות** המ.מ.K.

חישובים: גיליון אקסל "דוגמה א- 01"

בתא **E6** אנו מציגים את תוחלת המ.מ. K בעזרת פונקצית ההסתברות,

בתא **F6** אנו מציגים את החישוב האלטרנטיבי של תוחלת המ.מ.K בעזרת פונקצית השרידות.

בתא **H6** אנו מציגים את שונות המ.מ. K.

בתא **I6** אנו מציגים את המומנט השני של המ.מ. K.

בתא **J6** אנו מציגים את החישוב האלטרנטיבי של שונות המ.מ. K בעזרת במומנט השני של K.

הנפש בת ה-40 רוכשת פוליסה המבטיחה למוטבים שלה הטבה המשולמת להם בסוף שנת מותה בגובה 100,000 ₪. ונקראת **הטבת המוות**. (בזמן K+1 הנמדד ביחס לעת הנפקת הפוליסה יקבלו מוטבי הנפש הטבת מוות בגובה 100,000 ₪)

אם הריבית השנתית בה מתמחרת חברת הביטוח את הפוליסה שווה ל 5% אז שווי הטבת המוות המיקרית מחושבת ביחס לעת הנפקת הפוליסה שווה ל:

$$100{,}000 \cdot v^{K+1} \text{ ₪ } \quad (v = 1.05^{-1})$$

ערכיו של המ.מ. v^{K+1} (ערך ההטבה המיקרית מחושבת בעת הנפקת הפוליסה עבור הטבת מוות בגובה 1 ש"ח) נתונים בתאים L7-L77.

ווקטור ההסתברות של המ.מ. v^{K+1} נתון בתאים B7-B77. (זהה לווקטור ההסתברות של המ.מ. K).

השווי הממוצע של הטבת המוות שרכשה הנפש מחושבת בעת הנפקת הפוליסה נתון על ידי:

$$E100{,}000 \cdot v^{K+1} = 100{,}000 \cdot Ev^{K+1} = 100{,}000 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} v^{r+1} \cdot P(K=r).$$

פרופ' נפתלי לנגברג

בתא M5 נציג את תוחלת הטבת המוות המיקרית המחושבת בעת הנפקת הפוליסה.

סטית התקן (שורש השונות) של הטבת המוות המיקרית, מחושבת בעת ההנפקה, שווה ל:

$$Var^{0.5}[100{,}000 \cdot v^{K+1}] = 100{,}000 \cdot Var^{0.5}(v^{K+1}) =$$

$$100{,}000 \cdot [\sum_{r=0}^{\infty} (r - Ev^{K+1})^2 \cdot P(K=r)]^{0.5}$$

בתא N5 נציג את סטית התקן של הטבת המוות המיקרית המחושבת בעת הנפקת הפוליסה.

סטית התקן של הטבת המוות המיקרית המחושבת בעת הנפקת הפוליסה שווה גם ל:

$$Var^{0.5}[100{,}000 \cdot v^{K+1}] = 100{,}000 \cdot Var^{0.5}[v^{K+1}] =$$

$$100{,}000 \cdot [Ev^{2 \cdot K+2} - (Ev^{K+1})^2]^{0.5}$$

בתא P5 נציג את סטית התקן של ההטבה המיקרית המחושבת בעת הנפקת הפוליסה בעזרת נוסחה זו.

סטית התקן של הטבת המוות המיקרית המחושבת בעת הנפקת הפוליסה שווה גם ל:

$$Var^{0.5}[100{,}000 \cdot v^{K+1}] = 100{,}000 \cdot Var^{0.5}[v^{K+1}] =$$

$$100{,}000 \cdot [\sum_{r=0}^{\infty}(v^{r+1} - Ev^{K+1})^2 \cdot P(K=r)]^{0.5}$$

בתא Q5 נציג את סטית התקן של ההטבה המיקרית המחושבת בעת הנפקת הפוליסה בעזרת הנוסחה האחרונה.

סימון :

עבור $m = 0,1,\ldots$ יהי $Z(m) = \sum_{r=0}^{m} v^r$.

דוגמה א-02 :

יהי **K** מ.מ. המתאר את יתרת השנים השלמות שתחיה נפש כיום בת 30. בעמודות A ו B נתונים ערכי המ.מ. K ווקטור השרידות של המ.מ. K.

פרופ' נפתלי לנגברג

ראשית נציג בעמודה **C** את ווקטור ה**הסתברות** של המ.מ.K.

הערה:

על מנת לבדוק את נכונות ההצגה של ווקטור ההסתברות אנו מסכמים בתא C6 את ההסתברויות בעמודה C. אם התוצאה המתקבלת בתא C6 היא 1 יש להניח שהצגת ווקטור ההסתברות נכונה.

עתה נחשב:

את **תוחלת** המ.מ.K,

ואת **שונות** המ.מ.K.

חישובים: גיליון אקסל "דוגמה א- 02"

בתא **E6** אנו מציגים את תוחלת המ.מ. K.

בתא **F6** אנו מציגים את תוחלת המ.מ.K בעזרת הנוסחה האלטרנטיבית.

בתא **H6** אנו מציגים את שונות המ.מ. K.

בתא **I6** אנו מציגים את המומנט השני של המ.מ. K.

בתא **J6** אנו מציגים את שונות המ.מ. K בעזרת נוסחת החישוב האלטרנטיבית.

חברת הביטוח מתחייבת לשלם הטבה כספית למוטבים של הלקוחה בת ה-30. בתמורה משלמת הלקוחה תשלומים שנתיים,הנקראים **פרמיות**, בגובה 1,500 ₪ מראש: התשלום הראשון בעת מתן התחייבות חברת הביטוח כל עוד הנפש חיה. K+1 תשלומים כל אחד בגובה 1,500 ₪ בזמנים $0,1,\ldots,K$ הנמדדים ביחס לעת מתן ההתחייבות על ידי חברת הביטוח).

החברה מחשבת את התזרים המיקרי של הפרמיות על פי תשואה שנתית של 6%.

ערך תזרים הפרמיות המיקרי מחושב בעת מתן ההתחייבות שווה ל:

$$\sum_{r=0}^{K} 1{,}500 \cdot v^{r} = 1{,}500 \cdot Z(K) \quad ₪ \quad (v = 1.06^{-1})$$

בעזרת נוסחת טור גיאומטרי סופי ניתן להראות שערך התזרים הפרמיות המיקרי מחושב בעת מתן ההתחייבות שווה גם ל:

פרופ' נפתלי לנגברג

$$(d = 1 - v) \text{ ש"ח } 1{,}500 \cdot \frac{1 - v^{K+1}}{d}$$

ערכיו של המ.מ. $Z(K)$ נתונים בתאים M7-M87 ואלטרנטיבית בתאים N7-N87.

ווקטור ההסתברות של המ.מ. $Z(K)$ נתון בתאים B7-B77.

השווי הממוצע של ערך התזרים מחושב בעת מתן ההתחייבות נתון על ידי:

$$1{,}500 \cdot \sum_{r=0}^{\infty} P(K = r) \cdot v^{r}$$

וגם על ידי:

$$1{,}500 \cdot \frac{1 - Ev^{K+1}}{d} = 1{,}500 \cdot \frac{1 - \sum_{r=0}^{\infty} P(K = r) \cdot v^{r+1}}{d}$$

ערך השווי הממוצע של ערך התזרים מחושב בעת מתן ההתחייבות נתון בתאים O3 ו P3.

סטית התקן (שורש השונות) של המ.מ. $1{,}500 \cdot Z(K)$, שווה ל:

$$Var^{0.5}[1{,}500 \cdot Z(K)] = 1{,}500 \cdot [\sum_{r=0}^{\infty} [Z(r) - EZ(K)]^{2} \cdot P(K = r)]^{0.5}$$

בתא Q3 נציג את סטית התקן של תזרים הפרמיות מחושב בעת ההנפקה.

באופן אלטרנטיבי נקבל שסטית התקן של תזרים הפרמיות מחושב בעת ההנפקה שווה ל:

$$Var^{0.5}[1{,}500 \cdot \frac{1 - v^{K+1}}{d}] = \frac{1{,}500}{d} \cdot Var^{0.5}(v^{K+1}) =$$

$$\frac{1{,}500}{d} \cdot [\sum_{r=0}^{\infty} (r - Ev^{K+1})^{2} \cdot P(K = r)]^{0.5}$$

בתא S3 נציג את סטית התקן של תזרים הפרמיות מחושב בעת ההנפקה.

בנוסף ניתן לחשב את סטית התקן של תזרים הפרמיות מחושב בעת ההנפקה על ידי:

$$\frac{1{,}500}{d}\cdot[Ev^{2\cdot K+2}-(Ev^{K+1})^2]^{0.5}$$

בתא U3 נציג את סטית התקן של תזרים הפרמיות מחושב בעת ההנפקה.

דוגמה א- 03:

יהי K מ.מ. המתאר את יתרת החודשים השלמים שתחיה נפש כיום בת 300 חודש .

בעמודה **A** בקובץ **דוגמה א-03** נתונים ערכי המ.מ. K (מ- 0 ועד 1152) ובעמודה **B** נתון ווקטור ההסתברות של המ.מ. K. בתא B6 אנו מסכמים את ווקטור ההסתברות.

בעמודה **C** נחשב את ווקטור השרידות של המ.מ. K.

הנפש רוכשת את הפוליסה הבאה:

בתמורה לתשלומי פרמיות חודשיות בגובה P מראש כל עוד הנפש חיה מתחייבת חברת הביטוח לשלם למוטבים של הלקוחה בסוף חודש מותה הטבת מוות בגובה 100,000 ₪.

החברה מקבלת מהלקוחה תזרים פרמיות בגובה P בזמנים $0,1,\ldots,K$ (יחסית לעת ההנפקה).

ערך תזרים הפרמיות המיקרי מחושב בעת ההנפקה שווה ל:

$$P\cdot\sum_{r=0}^{K}v^r=P\cdot\frac{1-v^{K+1}}{d}$$

המוטבים של הלקוחה מקבלים מהחברה הטבת מוות בגובה 100,000 ₪ בזמן K+1 (יחסית לעת ההנפקה). ערך הטבת המוות מחושב בעת ההנפקה שווה ל:

$$100{,}000\cdot v^{K+1}$$

הרווח\הפסד המיקרי של החברה מחושב בעת ההנפקה שווה ל:

ערך **תזרים תשלומי הפרמיות** מחושב בעת ההנפקה פחות ערך **הטבת המוות** מחושבת בעת ההנפקה.

לכן הרווח\ההפסד המיקרי שווה ל:

$$P\cdot\sum_{r=0}^{K}v^r-100{,}000\cdot v^{K+1}$$

פרופ' נפתלי לנגברג

ושווה גם ל:

$$P \cdot \frac{1-v^{K+1}}{d} - 100{,}000 \cdot v^{K+1} = \frac{P}{d} - (100{,}000 + \frac{P}{d}) \cdot v^{K+1}.$$

ערכי הרווח\ההפסד המיקרי נתונים בעמודות E ו F

החברה מתמחרת את הפרמיה P לפי תשואה שנתית של 7% ($v = 1.07^{-1}$) ומניחה ש**תוחלת הרווח\ההפסד המיקרי שווה לאפס.**

בעזרת **Goal Seek** או **Solver**, הנמצאים ב- Tools נמצא את גובה הפרמיה P (הנתון בתא E2) המאפס את תוחלת הרווח\ההפסד המיקרי (הנתונה בתא G6).

הערה:

הפרמיה P מקיימת את כל אחת משתי המשוואות הבאות:

$$P \cdot E \sum_{r=0}^{K} v^{r} - 100{,}000 \cdot Ev^{K+1} = 0$$

$$P \cdot \frac{1 - Ev^{K+1}}{d} - 100{,}000 \cdot Ev^{K+1} = 0$$

לכן ערכו של P נתון על ידי כל אחת משתי המשוואות הבאות:

$$P = \frac{100{,}000 \cdot Ev^{K+1}}{E \sum_{r=0}^{K} v^{r}}$$

$$P = \frac{100{,}000 \cdot d \cdot Ev^{K+1}}{1 - Ev^{K+1}}$$

ערך הפרמיה מחושב בתאים L2 ו M2.