לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל
Israel Association of Valuators and Financial Actuaries

27 במאי 2017

כיצד מחשבים תוחלת חיים של בנאדם?

השבוע ביקרתי קולגה שלי במשרדה בעניין מסוים ואז היא שאלה אותי "תגיד, כאקטואר, כיצד מחשבים תוחלת חיים של בנאדם?". "את מכירה טבלת תמותה?" שאלתי. "כן", היא ענתה, "וגדלים אקטואריים?" הקשתי, "לא, למה זה קשור?". "בוודאי" עניתי והתחלתי להסביר.

נגדיר תחילה מספר הגדרות.

<u>אוכלוסיה סגורה</u>- זוהי אוכלוסיה שלאחר הקמתה לא מצטרפות אליה נפשות נוספות. אם נניח כי בקרן נאמנות סגורה ישנם 1,000 חברים, אז כאשר אחד מהם יוצא, מישהו מיד נכנס במקומו. באוכלוסיה סגורה אף אחד אחר לא נכנס.

<u>גיל של נפש</u>- מספר היחידות השלמות שחיה נפש (או מבוטח). יחידת גיל יכולה להיות, בין היתר, שנה, רבעון, חודש, שבוע או יום.

נניח כי x_0 ו- w הינם שני מספרים טבעיים, כאשר $0 \le x_0 \le w$, w הינו הגיל המקסימלי בטבלת תמותה (בדר"כ 109 או 110) ו- 0 הוא הגיל המינימלי בטבלת התמותה (בלוחות של הלמ"ס הגיל המינימלי הוא 0 בעוד שבלוחות של האוצר עבור קרנות הפנסיה הגיל המינימלי הוא גיל 18), אזי טבלת תמותה או לוח חיים הינם סדרה סופית ולא עולה של מספרים ממשיים חיוביים. את הסדרה הזו ניתן להציג כדלקמן:

$$\{l_x; x = x_0,.., w\}$$

כאשר:

l_x - זהו המספר הממוצע של נפשות (מבוטחים) שהגיעו לגיל x בחיים.

l_{x_0} - זהו המספר הממוצע של האנשים בגיל l_{x_0} שהינם בחיים.

WWW.IAVFA.ORG
רחוב נתן ברניצקי 5, ראשון לציון 7524205, ישראל
077-5070590 153-77-5070590 IAVFA1020@GMAIL.COM

כך לדוגמא אם נסתכל על לוח התמותה של הלמ"ס הנקרא *"לוח תמותה שלם של ישראל: יהודים – זכרים, 2010-2014"*, הרי שעבור $x_0 = 30$ המספר הממוצע של האנשים שהגיעו לגיל 30 הינו 99,016 מתוך 100,000.

כעת נעבור לסימונים:

א. (x) מסמן או מציין נפש בגיל x (ערך)

ב. המשתנה המקרי X מציין את הגיל בעת המוות של נפש (מבוטח)

ג. $F\ X^{(x)} = P(X \le x)$ זוהי פונקציה מצטברת המציינת את ההסתברות שמבוטח יחיה לכל היותר עד גיל x (כלומר ימות עד גיל x).

נסביר כי:

$$f\ X^{(x)} = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad x \sim \exp(\theta)$$

$$F\ X^{(x)} = \int_0^x \theta e^{-y\theta} dy = \left(\theta \cdot \frac{e^{-y\theta}}{-\theta}\right)_0^x = 1 - e^{\theta x}$$

$$F\ X^{(30)} = 1 - e^{-\theta \cdot 30}$$

למעשה התוצאה הינה ההסתברות שהוא ימות עד גיל 30.

ד. נסמן ב- $s(x)$ את פונקציית ההשרדות של המבוטח, כלומר, זוהי ההסתברות שהמבוטח ישאר בחיים לאחר גיל x.

$$s(x) = 1 - F(x) = \overline{F}(x) = P(X > x)$$

$$s(x) = e^{-\theta \cdot x} \quad \forall\ x > 0$$

ה. בנוסף:

$$(F(x))' = f(x) = (-s(x))'$$

ו. נסמן ב- μ_x את קצב התמותה הרגעי (הווה אומר, מהי ההסתברות שאדם ימות תוך שנייה), כאשר פונקציית התמותה הרגעית הינה כדלקמן:

$$\mu_x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} P\{X \le x + \varepsilon \mid X > x\}$$

נזכיר כי:

$P(A\mid B)$ = מה ההסתברות לקבל A בהינתן או בקרות B

$P(A)$ = מה ההסתברות שנטיל 2 קוביות הוגנות ונקבל סכום של 4 ? התשובה: $\frac{3}{36}$.

$P(A\mid B=2)$ = מה ההסתברות שנטיל 2 קוביות הוגנות ונקבל סכום של 4, כאשר בקוביה אחת קיבלנו את המספר 2 ? התשובה: $\frac{1}{6}$.

$$P(A\mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\mu_x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{P(X \le x + \varepsilon\ ,\ \ X > x)}{P(X > x)}$$

נגדיר את הנגזרת:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon \cdot s(x)} = \frac{(F(x))'}{s(x)} = \frac{f(x)}{s(x)} = -\frac{(s(x))'}{s(x)} = \mu_x$$

$$-\frac{(s(x))'}{s(x)} = -(\ln s(x))' = \mu_x$$

$$(\ln s(x))' = -\mu_x$$

$$\ln s(x) = \int_0^x -\mu(y)dy$$

$$s(x) = e^{-\int_0^x \mu(y)dy}$$

כעת נסביר כי ${}_n p_x$ (שימו לב שבאקטואריית סיכוני חיים P גדולה מציינת את גובה הפרמיה בעוד ש- p קטנה מציינת את ההסתברות לחיות) הינה ההסתברות שמבוטח בגיל x יגיע לגיל $x+n$ בחיים.

אם בקוביה הוגנת Ω (אומגה) מייצגת את מרחב המדגם, דהיינו, את אוסף כל התוצאות האפשרויות של הניסוי, הרי שההסתברות לקבל בהטלת קוביה הוגנת אחת מספר שקטן או שווה ל- 3 הינה חצי.

$$P(A)=\frac{n(A\le 3)}{n(\Omega)}=\frac{3}{6}=0.5$$

ולכן ההסתברות שמבוטח בגיל x יגיע בחיים לגיל $x+n$ הינה:

$${}_n p_x=\frac{l_{x+n}}{l_x}$$

אם נסמן ב- T_x את המשתנה המקרי המתאר את יתרת אורך החיים של מבוטח שהגיע בחיים לגיל x, אזי נוכל להציג את ${}_n p_x$ באופן הבא:

$${}_n p_x=P(T(x)>n)$$

בנוסף נסמן את ההסתברות שאדם בגיל x ימות עד גיל $x+n$ כדלקמן:

$${}_n q_x=1-{}_n p_x=P(T(x)\le n)$$
$${}_n q_x=\frac{l_x-l_{x+n}}{l_x}$$

נעיר רק כי כאשר $n=1$ או אז ${}_1 p_x=p_x$ וגם ${}_1 q_x=q_x$ מאחר ולא נהוג לציין או לרשום תקופה אחת.

כעת נעבור ליישום:

מהי ההסתברות של זכר יהודי בן 40 למות תוך שנה? $_1q_{40} = 0.000884$.

מהי ההסתברות של זכר יהודי בן 40 להגיע לגיל 41?

$$_1p_{40} = 1 - _1q_{40} = \frac{l_{41}}{l_{40}} = \frac{98{,}318}{98{,}405} = 0.999116$$

מהי ההסתברות של זכר יהודי בן 30 לחיות 8 שנים?

$$_8p_{30} = \frac{l_{38}}{l_{30}} = \frac{98{,}559}{99{,}016} = 0.995386$$

לעתים רוצים לחשב תוחלות חיים. הסימון האקטוארי לתוחלת חיים הוא $e_x^0 = e_x$, כאשר לכל משתנה מקרי X חיובי מתקיים:

$$\sum_x P(X > x) = \sum_x P_x$$

ולכן התוחלת הינה כדלקמן:

$$E(x) = \sum_x x \cdot p_x^{(x)}$$

ניתן להראות שעבור משתנה מקרי א-שלילי (כלומר חיובי או אפס) מתקיים השיוויון הבא:

$$E(x) = \sum p_x$$

כלומר, על מנת לחשב את יתרת תוחלת החיים של אדם בגיל x צריך לסכום את כל ההסתברויות (קרי, ה- קים) מהגיל שלו ואילך.

"אז פשוט צריך לסכום את כל ההסתברויות מהגיל של המבוטח ועד לגיל המקסימלי בטבלת התמותה? כך אני מחשבת את תוחלת החיים?" שאלה הקוגלה. באותו רגע צלצל הנייד שלי ושמו של קולגה וחבר

טוב שלי מהצפון "נמרח" על מסך הסמארטפון שלי. עניתי ושאלתי לשלומו. "תגיד, מהי תוחלת החיים של גבר בן 30?" שאל הקולגה מהצפון מבעד לקו. "אה, זה פשוט", עניתי, "תפתח לוח תמותה של הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה, ותחבר את כל ה- l_x מגיל 30 ועד גיל 110 ותחלק את הסכום שקיבלת ב- l_{30}". "מה זה נותן לי?" שאל הקולגה מהצפון. "זה נותן לך בעצם את סכום ההישרדויות, כלומר, את תוחלת יתרת אורך החיים של גבר בן 30", עניתי "תסתכל בלוח של הלמ"ס יש לך מצד שמאל לטור של ה- l_x, טור של e_x. זוהי תוחלת החיים לכל גיל והיא מחושבת על ידי סכימה של כל ה- l_x מגיל x ועד הסוף וחלוקת הסכום המתקבל ב- l_x". "מעולה ותודה רבה" אמר הקולגה מהצפון וניתק.

"תגיד", אמרה בעצבנות רבתי הקולגה שישבתי במשרדה, "לא יכולת לחסוך לי את השיעור בחדו"א (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי) ופשוט להגיד לי שיש טור בלוח התמותה של הלמ"ס של תוחלת חיים?". "את ביקשת לדעת כיצד מחשבים תוחלת חיים של בנאדם ועל כן נתתי לך הסבר מפורט כולל דוגמאות. הוא שאל שאלה ספציפית בטלפון אז עניתי לו בקצרה", עניתי לה. "בקיצור, להבא רצוי לשאול אותך שאלות בטלפון ולא פרונטלית, כדי שלא תחפור לי על סיגמות ואינטגרלים?" שאלה. "רצוי" עניתי "רצוי".

בכבוד רב,

רועי פולניצר

יו"ר ומנכ"ל לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל