



תוחלת החיים והגיל הממוצע בעת מוות

מאת: רועי פולניצר

תוחלת החיים (Expectation of Life) מוגדרת בשתי צורות e_x ו- e_x^0 :

$$e_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_x$$

$$e_x^0 = \frac{1}{l_x} \int_0^{\infty} l_{x+t} dt = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt = \frac{T_x}{l_x}$$

ניתן לפרש את הפונקציות לעיל ככאלו המייצגות את אורך החיים הממוצע של נפש בגיל x , עם e_x , המכונה תוחלת

החיים המכווצת (Curtate Expectation) הסופרת אך ורק שנות חיים שלמות, ו- e_x^0 , המכונה תוחלת החיים השלמה (Complete Expectation), הסופרת את אורך החיים המלא.

קירוב מסוים לקשר שבין שתי תוחלות החיים יכול להתבסס על הסקה; כך שעל מנת להתעלם מהשנים הלא שלמות בממוצע עלינו להתעלם מ- $\frac{1}{2}$ ונקבל ש-

$$e_x^0 \approx e_x + \frac{1}{2}$$

קשר זה הוכח כמדויק יותר כאשר מביאים בחשבון את הנוסחה הבאה

$$\bar{a}_x \approx a_x + \frac{1}{2}$$

והפיכת שיעור הריבית $i = 0$ מספקת נוסחת הקירוב כאשר תוחלת החיים הינה מקרה פרטי של קצבת חיים (life annuity) עבור שיעור ריבית שנתי של 0%.



צורה מדויקת יותר של הקשר שבין שתי תוחלות החיים מתקבלת באמצעות הנוסחה הבאה

$$e_x^0 \approx e_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \mu_x$$

אולם ביטוי זה על פי רוב איננו מצוי בשימוש.

על פי רוב, בטבלאות תמותה המבוססות על סטטיסטיקת תמותה של אוכלוסיה מסוימת נמצא את e_x^0 , בעוד שבדרך כלל בטבלאות ביטוח חיים נמצא את e_x .

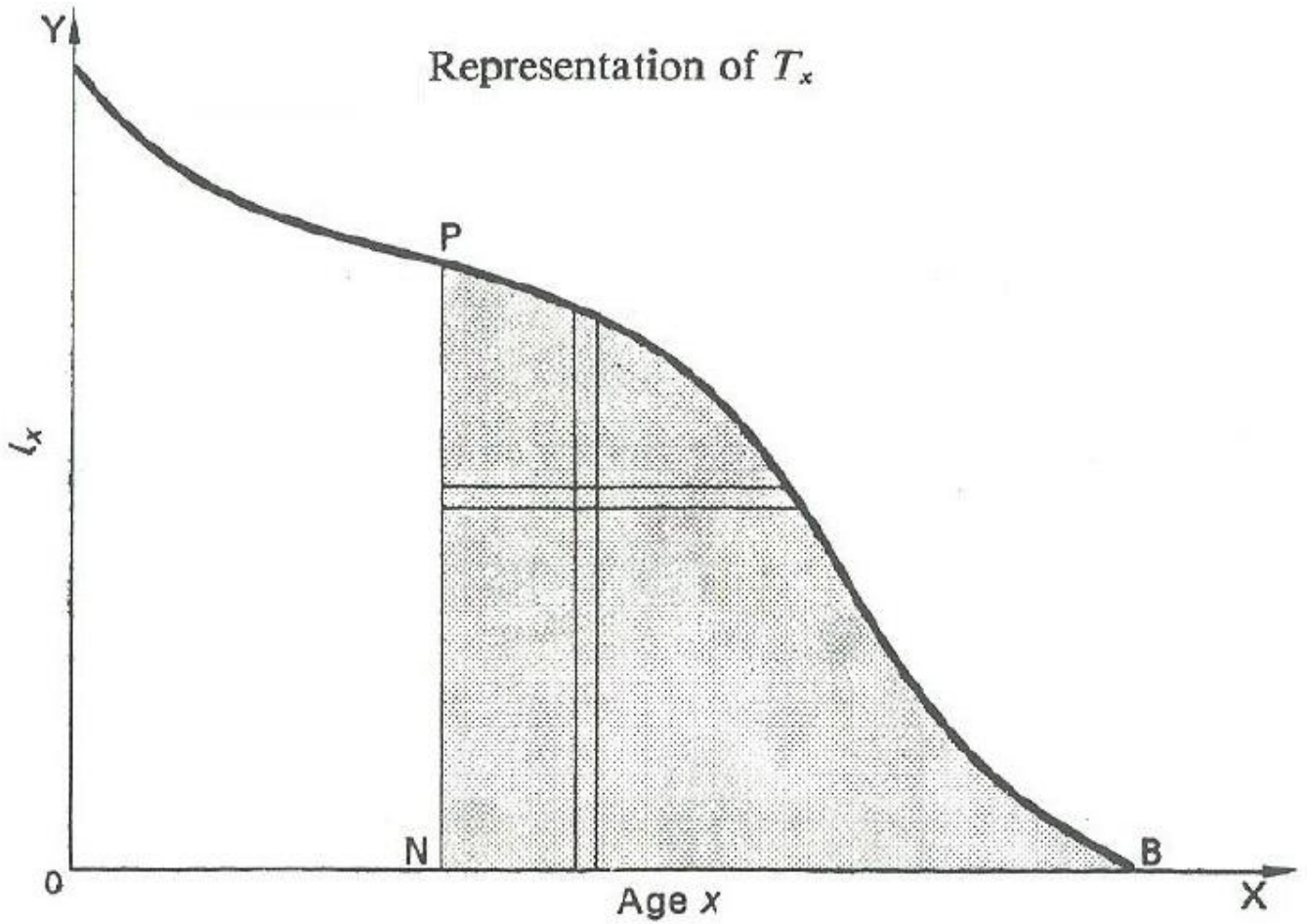
יתרת החיים (קרי, מספר השנים הממוצע) לאחר גיל x הינה e_x^0 , כך שהגיל הממוצע בעת מוות עבור אנשים אשר הגיעו לגיל x הינו

$$x + e_x^0 = x + \frac{T_x}{l_x}$$

יש לציין כי ניתן לפרש את T_x בשתי דרכים שונות, בהתאם לשאלה האם נבחנת אוכלוסיה סטציונארית המייצגת את האוכלוסיה מעל לגיל x , או האם המודל הרגיל של טבלת התמותה מייצג את אורך החיים העתידי הצפוי עבור קבוצת אנשים x .

ניתן לייצג את T_x בצורה גרפית כמוצג בתרשים 1. T_x שווה לאזור PNB, אשר ניתן לחלקו לרצועות המקבילות ל-OX או ל-OY.

החלוקה המקבילה ל-OY מייצגת את ההגדרה של T_x על ידי סכימת האוכלוסייה שמעל לגיל x . בחלוקה המקבילה ל-OX, הנפשות בגיל x מסודרות לאורך PN לפי אריכות חיים (Longevity), ולכן "בגבול" כל אחת מהרצועות מייצגת את אורך החיים העתידי של אדם אחד.



באוכלוסייה סטציונארית היחס שבין מספר הלידות השנתי לכלל האוכלוסייה ("שיעור הילודה") הוא

$$\frac{l_0}{T_0} = \frac{1}{e_x}$$

שהוא גם "שיעור התמותה".



תוחלת החיים הזמנית הינה

$$e_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n {}_t p_x$$

-1

$$e_{x:\overline{n}|}^0 = \int_0^n {}_t p_x dt$$

ולפעמים אנו נתקלים ב-

$$e_{x:\overline{n}|} = e_x - \frac{l_{x+n}}{l_x} e_{x+n}$$

דוגמא מס' 1:

הבה ונוכיח ש-

$$\frac{dL_x}{dx} = -d_x \quad (i)$$

$$\frac{dT_x}{dx} = -l_x \quad (ii)$$

$$\frac{d e_x^0}{dx} = \mu_x e_x^0 - 1 \quad (iii)$$



פתרון דוגמא מס' 1:

(i) פתרון:

$$\begin{aligned}L_x &= \int_0^1 l_{x+t} dt \\ \therefore \frac{dL_x}{dx} &= \int_0^1 \frac{dl_{x+t}}{dx} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dl_{x+t}}{dt} dt \\ &= [l_{x+t}]_{t=0}^{t=1} \\ &= l_{x+1} - l_x\end{aligned}$$

$$\frac{dL_x}{dx} = -d_x$$

(ii) פתרון:

$$\begin{aligned}T_x &= \int_0^\infty l_{x+t} dt \\ \therefore \frac{dT_x}{dx} &= \int_0^\infty \frac{dl_{x+t}}{dx} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{dl_{x+t}}{dt} dt \\ &= [l_{x+t}]_{t=0}^{t=\infty}\end{aligned}$$

$$\frac{dT_x}{dx} = -l_x$$



(iii) פתרון:

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x}$$

$$\therefore \frac{d e_x^0}{d x} = \frac{1}{l_x^2} (l_x (-l_x) - T_x (-\mu_x l_x))$$

$$\frac{d e_x^0}{d x} = \mu_x e_x^0 - 1$$

דוגמא מס' 2:

הבה ונראה כי האמונה הרווחת לפיה שווייה של קצבה ודאית (annuity certain) זמנית לנפש בגיל x לתקופה הדומה לתוחלת החיים שלה, e_x , שקולה אפקטיבית מכל הבחינות האקטואריות המהותיות לקצבת חיים אינסופית לנפש בגיל x איננה נכונה בעליל. בנוסף נקבע מי מהשתיים גדולה יותר.

פתרון דוגמא מס' 2:

נניח שישנן l_x כמויות שמהן d_x שווה ל- v , d_{x+1} שווה ל- v^2 , d_{x+2} שווה ל- v^3 , וכך הלאה. התוחלת האריתמטית (קרי, החשבונית) של הכמויות הללו הינה

$$\frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} d_{x+t}$$

$$= A_x = 1 - d \ddot{a}_x$$



התוחלת הגיאומטרית (קרי, ההנדסית) של של הכמויות הללו הינה

$$\begin{aligned}
 & \left(v^{d_x} v^{2d_{x+1}} v^{3d_{x+2}} \dots \right)^{\frac{1}{l_x}} \\
 &= v^{\frac{1}{l_x}(l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \dots)} \\
 &= v^{1+e_x} \\
 &= 1 - d\ddot{a}_{\overline{1+e_x}|}
 \end{aligned}$$

התוחלת האריתמטית של קבוצת כמויות חיוביות שונות גבוהה יותר מהתוחלת הגיאומטרית של אותה קבוצה

$$\begin{aligned}
 1 - d\ddot{a}_x &> 1 - d\ddot{a}_{\overline{1+e_x}|} \\
 \therefore \ddot{a}_{\overline{1+e_x}|} &> \ddot{a}_x \\
 \text{or} \\
 a_{\overline{e_x}|} &> a_x
 \end{aligned}$$

לפיכך, קצבה ודאית זמנית לנפש בגיל x מסוים לתקופה הדומה לתוחלת החיים שלה, e_x , תמיד תהיה גבוהה יותר מקצבת חיים אינסופית לנפש בגיל x .



דוגמא מס' 3:

הבה ונקבע בשתי דרכים את הגיל הממוצע בעת מוות עבור אלו שנפטרו בין הגילאים x ו- $x+n$

פתרון דוגמא מס' 3:

שיטה 1: מספר השנים אשר אותן חיו אנשים בגיל x , בין הגילאים x ו- $x+n$

$$= \int_0^n l_{x+t} dt = T_x - T_{x+n}$$

אשר כולל n שנים אשר אותן חיי כל אחד מהשורדים עד גיל $x+n$ כך שמספר השנים אשר אותן חיו אלו שנפטרו יהיה

$$T_x - T_{x+n} - nl_{x+n}$$

מספר מקרי המוות הוא $l_x - l_{x+n}$. כך שהגיל הממוצע בעת מוות של אלו שאר נפטרו בין הגילאים x ו- $x+n$ יהיה

$$x + \frac{T_x - T_{x+n} - nl_{x+n}}{l_x - l_{x+n}}$$

שיטה 2: במהלך שנה אחת מספר האנשים שנפטרו בין הגילאים x ו- $x+n$ הוא

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+n} y l_y \mu_y dy \\ &= \int_x^{x+n} y \frac{d}{dy} (-l_y) dy \\ &= [-y l_y]_x^{x+n} - \int_x^{x+n} (-l_y) dy \\ &= -(x+n) l_{x+n} + x l_x + T_x - T_{x+n} \\ &= x(l_x - l_{x+n}) + T_x - T_{x+n} - n l_{x+n} \end{aligned}$$



אם נחלק את הביטוי שקיבלנו במספר מקרי המוות נקבל את הגיל הממוצע בעת מוות

$$x + \frac{T_x - T_{x+n} - nl_{x+n}}{l_x - l_{x+n}}$$



פרטים נוספים אודות שווי פנימי ורועי פולניצר

פרטים אודות המשרד:

שווי פנימי (Intrinsic Value) מתמחה במתן שירותי ייעוץ כלכלי בתחומים של הערכות שווי, ניהול סיכונים, אקטואריה והנדסה פיננסית לצורך יישום הוראות רגולטוריות וסטטוטוריות, לצרכי דיווח כספי וביקורת, למטרות מס, לצרכי גיוס הון, לצרכי עסקאות, לצרכים משפטיים ולצורך פיתוח, יישום ותיקוף מודלים בתחומי ניהול הסיכונים והאקטואריה.

למשרד עשרה מגזרי פעילות:

- Corporate Finance Valuation
- Quantitative Finance Valuation
- Financial and Economic Modeling
- Transaction Support
- Market Risk Actuarial Science
- Credit Risk Actuarial Science
- Operational Risk Actuarial Science
- Investment Risk Actuarial Science
- Life Risk Actuarial Science
- Pension Risks Actuarial Science

תחומי הידע והפעילות כוללים:

- הערכת שווי תאגידים ומגזרים (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4, קישור 5, קישור 6, קישור 7, קישור 8)
- בניית תחזיות כלכליות ומצגות עסקיות (רצ"ב קישור)
- אמידת שיעור ההיוון הראוי/ הריבית הראויה להיוון תזרימי מזומנים (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4, קישור 5, קישור 6, קישור 7, קישור 8, קישור 9, קישור 10, קישור 11, קישור 12, קישור 13, קישור 14)
- הערכות שווי נכסים בלתי מוחשיים (רצ"ב קישור)
- ייחוס עלות רכישה, PPA – Purchase Price Allocation (רצ"ב קישור)
- בדיקות פגימה (Impairment) לנכסים, לרבות מוניטין (רצ"ב קישור)
- שווי הוגן אופציות משובצות (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3)
- שווי הוגן אופציות ריאליות (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4, קישור 5)
- שווי הוגן כתבי אופציות לעובדים (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4, קישור 5, קישור 6, קישור 7, קישור 8, קישור 9, קישור 10, קישור 11, קישור 12, קישור 13)
- שווי הוגן כתבי אופציות לדירקטורים (רצ"ב קישור)



- שווי הוגן כתבי אופציות למנכ"ל (רצ"ב קישור 1, קישור 2)
- הערכת הטבות מבוססות לעובדים (RS, RSU, SAR, יחידות פאנטום ומניות/אופציות מבוססות מניות (קישור)
- הערכת שווי מניה רגילה בחברה פרטית (409A) (רצ"ב קישור 1, קישור 2)
- פיצול רכיבי אקוויטי ומכשירי הון/התחייבות מורכבים (OPM / CCM / PWERM) (רצ"ב קישור)
- כימות נזקים, אובדן רווחים ואובדן הכנסות (רצ"ב קישור)
- הערכת שווי התחייבויות בגין תמלוגים למדען הראשי (רצ"ב קישור)
- הערכת שווי ערבויות פיננסיות וערבויות בעלים (רצ"ב קישור)
- הערכת שווי איגרות חוב / הלוואות סטרייט, הלוואות גישור ומשכנתאות (רצ"ב קישור)
- הערכת שווי הוגן של הלוואת בעלים (רצ"ב קישור)
- ייעוץ ובדיקות אפקטיביות הגנה לחשבונאות גידור (Hedge Effectiveness Tests) (רצ"ב קישור)
- שווי הוגן נגזרים משובצים (Embedded Derivatives) (רצ"ב קישור)
- הערכות שווי וניתוח סיכונים לדוח גלאי 2 (רגישות, VaR) (רצ"ב קישור)
- הערכות שווי וניתוח סיכונים ל- IFRS 7 (רצ"ב קישור)
- הערכת שווי איגרות חוב להמרה, הלוואות הניתנות להמרה ומסגרות מימון המירות (רצ"ב קישור)
- הערכת שווי אופציות פיננסיות ופוזיציות נגזרים מורכבות (רצ"ב קישור)
- בחינת יכולת פירעון ואיתנות פיננסית (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4, קישור 5, קישור 6, קישור 7)
- ייעוץ ומידול כלכלי מורכב (BOT ו-PPP), בקרה וליווי פיננסי (רצ"ב קישור 1, קישור 2)
- ייעוץ ומידול שווי פרמיות שליטה ומיעוט (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4, קישור 5)
- ייעוץ ומידול שווי פרמיות גודל (רצ"ב קישור 1, קישור 2)
- ייעוץ ומידול סטיית התקן הנכסית (רצ"ב קישור 1, קישור 2)
- ייעוץ ומידול שווי ניכיון בגין היעדר סחירות (DLOM) (קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4, קישור 5, קישור 6)
- ייעוץ ומידול שווי אי סחירות של אופציות (רצ"ב קישור)
- ייעוץ ומידול ניכיון בגין מסים על רווחי הון מובנים (רצ"ב קישור)
- ייעוץ ומידול דיסקאונטים בשותפויות מוגבלות משפחתיות בארה"ב (רצ"ב קישור)
- ייעוץ ומידול ניכיון בגין חסימה, איש מפתח, הסכם מחייב, פורטפוליו והיעדר זכויות הצבעה (רצ"ב קישור)
- חוות דעת מומחה בלתי תלוי בהליכים משפטיים (רצ"ב קישור 1, קישור 2)
- הערכות שווי יחסי מיזוג וייעוץ עסקאות (רצ"ב קישור)
- הערכת שווי תמורה מותנית בעסקאות מיזוגים ורכישות (רצ"ב קישור)
- חוות דעת הוגנות (Fairness Opinion) לבחינת עסקה (רצ"ב קישור)
- מיסוי בין לאומי – מחירי העברה בתנאי At Arm's Length (רצ"ב קישור)



- קביעת שווי הוגן למחירי העברה בין חברתיים ובין לאומיים (רצ"ב קישור 1, קישור 2)
- הערכות שווי לחברות ממגזרי האנרגיה, נפט וגז (רצ"ב קישור)
- הערכות שווי חברות פרטיות (רצ"ב קישור 1, קישור 2)
- הערכות שווי חברות ציבוריות (רצ"ב קישור 1, קישור 2)
- הערכות שווי חברות ממגזרי האנרגיה, נפט וגז (רצ"ב קישור)
- הערכות שווי חברות בקשיים (רצ"ב קישור)
- הערכות שווי חברות אחזקה (רצ"ב קישור)
- הערכות שווי חברות נדל"ן מניב (רצ"ב קישור)
- הערכות שווי חברות בניה למגורים (רצ"ב קישור)
- הערכות שווי בנקים (רצ"ב קישור)
- הערכות שווי חברות ביטוח (רצ"ב קישור)
- הערכות שווי תיקי ביטוח ולסוכנויות ביטוח (רצ"ב קישור)
- הערכות שווי חברות בתחום בנקאות והשקעות והחיתום (רצ"ב קישור)
- אופטימיזציה למבנה ההון, אפשרויות מימון של הפירמה ומקסום התשואה על ההון (רצ"ב קישור)
- בניית עקומי ריביות חסרי סיכון ומטריצות ריביות להיוון (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4, קישור 5)
- דירוג אשראי סינטי (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4, קישור 5, קישור 6)
- איזון משאבים בין בני זוג (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4, קישור 5, קישור 6)
- הערכת שווי נכסי קריירה (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3)
- Due Diligence כלכלי (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3)
- ניתוח סיכונים אשראי של צד נגדי (CVA ו-DVA) בעסקאות נגזרות פיננסית (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4)
- אקטואריית סיכונים אשראי (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4, קישור 5, קישור 6)
- כימות סיכונים שוק בבתי השקעות וחברות ביטוח (קישור)
- ליווי בהטמעת מערכות לניהול סיכונים ובתיקוף תוצאות עבור בתי השקעות וחברות ביטוח (קישור)
- אקטואריית סיכונים שוק (קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4, קישור 5, קישור 6, קישור 7, קישור 8, קישור 9, קישור 10)
- אקטואריית סיכונים תפעוליים (רצ"ב קישור 1, קישור 2)
- אקטואריית סיכונים נזילות (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3)
- אקטואריית סיכונים מודל (רצ"ב קישור)
- אקטואריית סיכונים השקעות (רצ"ב קישור)
- אקטואריית סיכונים חיים (רצ"ב קישור 1, קישור 2, קישור 3, קישור 4, קישור 5, קישור 6, קישור 7, קישור 8, קישור 9, קישור 10, קישור 11, קישור 12, קישור 13)
- חישוב הערך הגלום (Embedded Value) בעסקי ביטוח החיים, הבריאות והפנסיה (רצ"ב קישור 1, קישור 2)



- הערכת שווי פעילות המגזר הכללי (רכב חובה, רכב רכוש, חבויות ורכוש אחר) של חברות ביטוח (רצ"ב קישור)
- הערכת שווי פעילות קופות הגמל של חברות הביטוח (רצ"ב קישור)
- הערכת שווי פעילות קרנות הפנסיה של חברות הביטוח (רצ"ב קישור)
- אקטואריית סיכונים פנסיוניים (רצ"ב קישור 1, קישור 2)
- הערכה אקטוארית להתחייבויות בגין זכויות עובדים (רצ"ב קישור)
- מחויבות אקטוארית בגין הטבות לעובדים בהתאם ל- IAS19 (רצ"ב קישור)
- חוות דעת מומחה על עתודות אקטואריות בגין זכויות עובדים לפי תקן IAS 19 (רצ"ב קישור)
- אמידת שיעור הריבית הגלום בחכירה בהתאם ל- IFRS 16 (רצ"ב קישור)
- אמידת שיעור הריבית התוספתי לחוכר לפי תקן IFRS 16 (רצ"ב קישור)
- התאמת שוויין של עסקאות החלפה פיננסיות בשוק שמעבר לדלפק לסיכון אי ביצוע לפי תקן IFRS 13 (רצ"ב קישור)
- אמידת ההסתברות לחדלות פירעון (PD) (רצ"ב קישור)
- אמידת שיעור ההפסד בקרות חדלות פירעון (LGD- Loss Given Default) (רצ"ב קישור)
- חוות דעת מומחה בנושא הערכות שווי קניין רוחני (IP Valuations) (רצ"ב קישור)



פרטי הבעלים, המנהל, האקטואר ומעריך השווי האחראי: מר רועי פולניצר, CFV, F.I.L.A.V.F.A., FRM

- מחזיק בתואר M.B.A (בהצטיינות) במימון, תואר B.A (בהצטיינות) מאוניברסיטת בן גוריון בכלכלה עם התמחות במימון ודיפלומה בניהול סיכונים פיננסיים במתכונת FRM מאוניברסיטת אריאל בשומרון, למד בתוכנית ללימודי דיפלומה באקטואריה באוניברסיטת חיפה ועבר בהצלחה את הבחינות הסופיות של הרשות לניירות ערך בישראל לרישיון מנהל תיקים.
- מוסמך כאקטואר מלא (Fellow) מטעם לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (F.I.L.A.V.F.A.), מוסמך כמעריך שווי מימון תאגידי (CFV- Corporate Finance Valuator) מטעם לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (IAVFA- Israel Association of Valuators and Financial Actuaries), מוסמך כמנהל סיכונים פיננסיים (FRM- Financial Risk Manager) מטעם האיגוד העולמי למומחי סיכונים (GARP- Global Association of Risk Professionals) ומוסמך כמומחה לניהול סיכונים (CRM- Certified Risk Manager) מטעם האיגוד הישראלי למנהלי סיכונים (IARM- Israeli Association of Risk Managers).
- בעל ניסיון אינטנסיבי של כעשור וחצי בתחומים של הערכות שווי, ניהול סיכונים, אקטואריה והנדסה פיננסית, הכולל ביצוע פיקוח וניהול של אלפי עבודות הערכות שווי, חוות דעת אקטואריות, ניתוח סיכונים ועבודות ייעוץ כלכליות למשרדי רואי חשבון, משרדי ייעוץ כלכלי, משרדי ביקורת חקירתית וחברות ציבוריות ופרטיות בארץ.
- לשעבר מרצה בנגזרות וניהול סיכונים פיננסיים, בתחום ניתוח דוחות כספיים והערכות שווי, בבית הספר לכלכלה במכללה האקדמית אשקלון ובמוסדות אקדמיים שונים, עוזר מחקר והוראה בתחום ניהול הסיכונים בבנקאות הישראלית של המלומד ה"ה ד"ר שילה ליפשיץ, ראש תחום הערכות השווי במשרד רואי חשבון רוה-רביד (כיום Russell Bedford ישראל), מנהל סיכונים וראש תחום שווי הוגן במשרד הייעוץ האקטוארי של ד"ר בעז ים, מנהל סיכונים ומודליסט ראשי של ועדת השקעות באוניברסיטת בן גוריון.

הסתמכות על מומחים:

- שווי פנימי הוקם בשנת 2011 ומעסיק מומחים מעת לעת בתחומי עיסוקו.
- שווי פנימי נהנה ממעמד מקצועי גבוה ממעמד מקצועי גבוה כמומחה עצמאי בלתי תלוי, לכאורה ולמעשה, לצרכי הסתמכות בידי רואי החשבון המבקרים, רשות ניירות ערך בישראל, רשות המסים בישראל, בתי דין רבניים ובתי משפט בישראל. לשווי פנימי Advisory Board המורכב מאישים בולטים בתחומי האקדמיה, המימון והערכות השווי בישראל ונהנה משיתופי פעולה מקצועיים בארץ. המשרד מיישם וולנטרית את כללי האתיקה, הסטנדרטים המקצועיים ותקנות אי התלות של לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (IAVFA- Israel Association of Valuators and Financial Actuaries), של האיגוד העולמי למומחי סיכונים (GARP- Global Association of Risk Professionals) ושל האיגוד הישראלי למנהלי סיכונים (IARM- Israeli Association of Risk Managers).

נשמח לעמוד לשירותיכם לכל שאלה או הבהרה, בכל עת