פרק ד: פוליסות הנפדות בוודאות

פוליסה הנפדת בודאות

פוליסה הנפדת בודאות היא חוזה בין מנפיק הפוליסה לבין רוכש הפוליסה בו מצוין:

(א) מספר, גובה, וזמני ההפקדות, של רוכש הפוליסה (הנקראות **פרמיות**),

(ב) זמן פירעון הפוליסה, (אותו נסמן ב- n)

(ג) התמורה שיקבל רוכש הפוליסה בעת הפירעון (הנקרא **הסכום המובטח** או **או הטבת פירעון**) ,

(ד) הוצאות מנפיק הפוליסה: הוצאה בגין הנפקת הפוליסה: **הוצאה ראשונית**,

הוצאות בגין חידוש הפוליסה: **הוצאות חידוש**, והוצאה בגין תשלום ההטבה בעת הפרעון:

הוצאת פירעון .

הערות:

(א) הטבת הפרעון בתוספת הוצאת הפרעון נקראת **הטבת הפרעון ברוטו** ,

(ב) הפרמיה בקיזוז ההוצאות בעת תשלום הפרמיה נקראת **פרמיה נטו**,

(ג) פוליסה הנפדת בודאות מיוצגת על ידי שלושה תזרימים:

תזרים הפרמיות:

תשלומי פרמיות בתחילת כל יחידת זמן (מראש) עד זמן הפרעון,

תזרים ההוצאות:

תשלומי ההוצאה הראשונית, תשלומי הוצאות החידוש בתחילת כל יחידת זמן עד זמן הפרעון, ותשלום בעת הפרעון של הוצאת הפרעון,

תזרים הפירעון:

תשלום ההטבה בעת הפרעון.

(ד) "**משוואת הערך** " מקשרת בין ערכי שלושת התזרימים. לכל מספר ממשי t מתקיים השיוויון הבא:

ערך תזרים הפרמיות מחושב בזמן t **פחות** ערך תזרים ההוצאות מחושב בזמן t

פחות ערך תזרים ההטבות מחושב בזמן t **שווה** לאפס.

בפרט נקבל את:

משוואת הערך בעת ההנפקה:

ערך תזרים הפרמיות מחושב בעת הנפקת הפוליסה **פחות** ערך תזרים ההוצאות מחושב בעת הנפקת הפוליסה **פחות** ערך ההטבות מחושב בעת הנפקת הפוליסה **שווה** לאפס,

ואת:

משוואת הערך בעת הפירעון:

ערך תזרים הפרמיות מחושב בעת פירעון הפוליסה **פחות** ערך תזרים ההוצאות מחושב בעת הפירעון **פחות** ערך תזרים הסכום המובטח מחושב באת הפירעון **שווה** לאפס.

(ה) ממשוואת הערך ניתן לחלץ את ערך הפרמיה, או את ערך הטבת הפרעון כפי שנראה בדוגמאות,

ערכי הפוליסה

מושג חשוב הקשור לפוליסות הוא **ערכי הפוליסה** (ערכים רטרוספקטיביים וערכים פרוספקטיביים)

ערך פוליסה רטרוספקטיבי:

בכל נקודת זמן k משך תקופת ההפקדה יש ללקוח עניין לדעת מהו הסכום נטו שהצטבר לזכותו בגין הפקדותיו עד זמן k. אם למשל הלקוח מעונין לסיים בזמן k את ההתקשרות עם מנפיק הפוליסה חשוב לו לדעת מהו הסכום שהצטבר לזכותו בגין הפקדותיו עד זמן k למעט כמובן הפקדת הפרמיה בזמן k אותה הוא כבר לא ישלם. ערך תזרים תשלומי הפרמיות נטו (פרמיות פחות הוצאות)

ששולמו עד זמן k, לא כולל את התשלומים בזמן k, מחושב בזמן k נקרא **ערך הפוליסה הרטרוספקטיבי** בזמן k, $0 \le k \le n$.

ערך הפוליסה הרטרוספקטיבי בזמן k, $0 \le k \le n$, שווה ל:

ערך תזרים הפרמיות ששולמו במרווח הזמן $(-\infty, k)$ מחושב בזמן k **פחות**

ערך תזרים ההוצאות ששולמו במרווח הזמן $(-\infty, k)$ מחושב בזמן k.

חישוב רקורסיבי של ערך הפוליסה הרטרוספקטיבי:

מאחר ובמרווח הזמן $[k-1, k)$ יש תשלום פרמיה ותשלום הוצאות שניהם בזמן k-1 הרי שערך הפוליסה הרטרוספקטיבי בזמן k שווה ל:

ערך הפוליסה הרטרוספקטיבי בזמן k-1 ב**תוספת** הפרמיה המשולמת בזמן k-1 ומצטברת ליחידת זמן ו**בהפחתת** ההוצאות בזמן k-1 המצטברת ביחידת זמן.

מאחר ובעת ההנפקה הערך הרטרוספקטיבי של הפוליסה שווה לאפס ניתן בעזרת הנוסחה הרקורסיבית לחשב את ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים בזמנים $k = 0, \dots, n$.

ממשואת הערך בעת הפירעון נובע ש:

ערך תזרים ההוצאות במרווח הזמן $(-\infty, n]$ מחושב בזמן הפרעון **בתוספת** ערך תזרים ההטבות במרווח הזמן $(-\infty, n]$ מחושב בזמן הפרעון **שווה** לערך תזרים הפרמיות במרווח הזמן $(-\infty, n]$ מחושב בזמן הפרעון .

ערך תזרים ההוצאות במרווח הזמן $(-\infty, n]$ מחושב בזמן הפרעון שווה ל:

ערך תזרים ההוצאות במרווח הזמן $(-\infty, n)$ מחושב בזמן הפרעון **בתוספת** הוצאת הפרעון מחושבת בזמן הפרעון,

ערך תזרים הפרמיות במרווח הזמן $(-\infty, n]$ מחושב בזמן הפרעון שווה ל:

ערך תזרים הפרמיות במרווח הזמן $(-\infty, n)$ מחושב בזמן הפרעון, (כי הפרמיות משולמות מראש)

לכן נובע ממשוואת הערך ש:

הטבת הברוטו מחושבת בזמן הפרעון **בתוספת** ערך תזרים ההוצאות במרווח הזמן $(-\infty, n)$ מחושב בזמן הפרעון **שווה** לערך תזרים הפרמיות במרווח הזמן $(-\infty, n)$ מחושב בזמן הפירעון.

לכן ערך הפוליסה הרטרוספקטיבי בעת הפירעון שווה לסכום המובטח ברוטו.

עובדה זו משמשת דרך לבדיקת נכונות החישוב של ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים.

ערך פוליסה פרוספקטיבי:

התחיבויות הנטו העתידיות של מנפיק הפוליסה לרוכש הפוליסה במרווח הזמן $[k,\infty)$ מחושבת בזמן k נקראת **ערך הפוליסה הפרוספקטיבי** בזמן k, $0 \le k \le n$.

מנפיק הפוליסה **<u>חייב לשלם לרוכש הפוליסה</u>** את הסכום המובטח ו **<u>חייב לשלם</u>** את ההוצאות העתידיות במרווח הזמן $[k,\infty)$, ואילו רוכש הפוליסה **<u>חייב לשלם</u>** **<u>למנפיק</u>** הפוליסה את הפרמיות העתידיות במרווח הזמן $[k,\infty)$. לכן ערך הפוליסה הפרוספקטיבי בזמן k, $0 \le k \le n$, שווה ל:

הסכום המובטח מהוון לזמן k **בתוספת** תזרים ההוצאות העתידיות במרווח הזמן $[k,\infty)$ מהוון לזמן k **ובהפחתת** תזרים הפרמיות העתידיות במרווח הזמן $[k,\infty)$ מהוון לזמן k.

חישוב רקורסיבי של ערך הפוליסה הפרוספקטיבי:

מאחר ובמרווח הזמן $[k-1,k)$ יש תשלום פרמיה ויש תשלום הוצאות שניהם בזמן k-1, הרי שערך הפוליסה הפרוספקטיבי בזמן k-1 שווה ל:

ערך הפוליסה הפרוספקטיבי בזמן k מהוון ביחידת זמן **בתוספת** ההוצאות בזמן k-1 **ובהפחתת** הפרמיה המשולמת בזמן k-1.

מאחר ובעת הפירעון הערך הפרוספקטיבי של הפוליסה שווה לסכום המובטח ברוטו ניתן בעזרת הנוסחה הרקורסיבית לחשב את ערכי הפוליסה הפרוספקטיביים בזמנים $k = 0, \dots, n$.

ממשוואת הערך מחושבת בעת ההנפקה נובע ש:

תזרים ההטבות במרווח הזמן $[0, \infty)$ מהוון לראשית **בתוספת** תזרים ההוצאות במרווח הזמן $[0, \infty)$ מהוון לראשית **שווה** לתזרים הפרמיות העתידיות במרווח הזמן $[0, \infty)$ מהוון לראשית. לכן:

ערך הפוליסה הפרוספקטיבי בעת ההנפקה חייב להיות שווה לאפס.

עובדה זו משמשת דרך לבדיקת נכונות החישוב של ערכי הפוליסה הפרוספקטיביים.

הערות:

(א) את ערכי פוליסה ניתן לחשב על סמך הבסיס בו השתמשנו בחישוב הפרמיה, או ניתן לחשב את ערכי הפוליסה על סמך בסיס שונה,

(ב) אם לחישוב ערכי פוליסה נשתמש בבסיס בו השתמשנו בחישוב הפרמיה אז, בכל נקודת זמן **שווה התזרים הרטרוספקטיבי לתזרים הפרוספקטיבי**, כפי שמראה השיקול הבא:

ממשוואת הערך בזמן k, $k = 0, \dots, n$, נובע:

ערך תזרים הפרמיות במרווח $(-\infty, k)$ מחושב בזמן k **פחות** ערך תזרים ההוצאות במרווח $(-\infty, k)$ מחושב בזמן k **<u>שווה</u>** לערך תזרים ההוצאות במרווח $[k, \infty)$ מחושב בזמן k **בתוספת** ערך זרם ההטבות במרווח $[k, \infty)$ מחושב בזמן k **פחות** ערך תזרים הפרמיות במרווח $[k, \infty)$ מחושב בזמן k.

עובדה זו משמשת דרך לבדיקת נכונות החישוב של ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים והפרוספקטיביים.

(ג) הצורך בחישוב ערכי הפוליסה על סמך בסיס שונה מזה המשמש לחישוב הפרמיה עולה שדנים

בדמי פידיון ודמי סילוקים אותם נציג בפיסקה הבאה.

דמי פדיון ודמי סילוקים:

(א) לקוח עשוי לבקש, משך חיי הפוליסה, שינוי באופי ההתקשרות שבינו לבין מנפיק הפוליסה.

נציג שלוש אפשרויות שינוי:

(i) הלקוח מבקש להפסיק את תשלומי הפרמיות ולקבל מידית סכום חד-פעמי כתמורה להפקדותיו לפני הפסקת תשלומי הפרמיה, הנקרא **דמי-פדיון**,

(ii) הלקוח מבקש להפסיק את תשלומי הפרמיות אך מוכן לחכות עד לזמן הפירעון המקורי ולקבל בזמן הפרעון סכום מובטח מעודכן הנקרא **דמי-סילוקים**,

(iii) הלקוח מבקש להנפיק לו פוליסה חדשה (היכולה להיות שונה בגובה הפרמיה המשולמת, בתקופת ההפקדה, בגובה ההוצאות, ובסכום המעודכן),

(ב) למנפיק הפוליסה יש הוצאות בגין השינוי הנקראת **הוצאת שינוי**.

(ג) אם הלקוח מחליט לפרוש לפני זמן הפרעון ומקבל דמי פידיון או לפרוש בעת הפרעון ולקבל דמי סילוקים ניתן לחשב את **הרווח\ההפסד של מנפיק הפוליסה**, ואת **הרווח\הפסד של בעל הפוליסה**.

(ד) אם הלקוח מחליט לפרוש לפני זמן הפרעון ומקבל דמי פידיון או לפרוש בעת הפרעון ולקבל דמי סילוקים ניתן לחשב את **תשואת מנפיק הפוליסה על כל העיסקה**, ואת **תשואת בעל הפוליסה על כל העיסקה**.

חישובים בגין קבלת דמי פידיון

הרווח\ההפסד של מנפיק הפוליסה אם בעל הפוליסה פרש בזמן k וקיבל דמי פידיון, $k=0,\dots,n$.

נניח שבעל הפוליסה פרש בזמן k, ומנפיק הפוליסה יכול להפקיד כספים בתשואה j(1) ליחידת זמן.

מנפיק הפוליסה קיבל מבעל הפוליסה עד זמן k k פרמיות בגובה P (בזמן k בעל הפוליסה לא משלם את הפרמיה). מנפיק הפוליסה מקזז מתשלומי הפרמיות את ההוצאות ומשקיע את הפרמיות נטו במוסד פיננסי בתשואה j(1) ליחידת זמן.

לכן הרווח\ההפסד של מנפיק הפוליסה בזמן k, $k = 0, \ldots, n$, נתון על ידי:

ערך ההצטברות של k הפרמיות נטו לפי תשואה j(1) מחושב בזמן k **פחות** דמי הפידיון בזמן k.

חישוב הצטברות הפרמיות נטו בזמן k לפי תשואה j(1), $k = 0, \ldots, n$:

דרך I :

מחשבים את הערכים הרטרוספקטיביים של הפוליסה לפי בסיס החישוב של הפרמיות למעט הריבית ליחידת הזמן השווה ל- j(1) (שאינה בהכרח שווה לריבית הנקובה בבסיס החישוב של הפרמיה) עם ערך הפרמיה P. ערכו של התזרים הרטרוספקטיבי הנ"ל בזמן k שווה לערך ההצטברות המבוקש של הפרמיות.

דרך II :

נהון את k הפרמיות נטו (ששולמו בזמנים $0,1,\ldots,k-1$) לעת ההנפקה (המשמשת כראשית) לפי תשואה השווה ל j(1). אחר כך נסכם את k הפרמיות המהוונות ונצבור אותן לזמן k, לפי תשואה השווה ל j(1). כתוצאה נקבל את ערך ההצטברות המבוקש של הפרמיות.

דרך III : (נוסחה רקורסיבית)

הערך המצטבר של הפרמיות נטו בזמן k $k = 1, \ldots, n$, שווה לערך המצטבר של הפרמיות נטו בזמן k-1 בתוספת הפרמיה נטו כל זה צבור ביחידת זמן לפי תשואה ליחידת זמן השווה ל- j(1). הערך המצטבר של הפרמיות נטו בזמן 0 שווה לאפס.(ולכן ניתן להשתמש בנוסחה הרקורסיבית)

הרווח\ההפסד של בעל הפוליסה עם בעל הפוליסה פרש בזמן k וקיבל דמי פידיון, $k=0,\ldots,n$

נניח שבעל הפוליסה פרש בזמן k, $k=0,\ldots,n$, ובעל הפוליסה יכול להפקיד כספים בתשואה j(2) ליחידת זמן.

בעל הפוליסה משלם עד זמן k k פרמיות בגובה P (בזמן k בעל הפוליסה לא משלם את הפרמיה) אותן יכול היה להפקיד במוסד פיננסי בתשואה j(2) ליחידת זמן. לכן הרווח\ההפסד של מנפיק הפוליסה בזמן k, $k=0,\ldots,n$, נתון על ידי:

דמי הפידיון בזמן k **פחות** ערך ההצטברות של k הפרמיות לפי תשואה j(2) מחושב בזמן k

חישוב הצטברות הפרמיות בזמן k לפי תשואה (j(2, $k=1,\ldots,n$:

דרך I :

מחשבים את הערכים הרטרוספקטיביים של הפוליסה לפי הבסיס: ריבית: j(2) , הוצאות: אין, והפרמיה P. ערכו של התזרים הרטרוספקטיבי הנ"ל בזמן k שווה לערך ההצטברות המבוקש של הפרמיות.

דרך II :

נהון את k הפרמיות (ששולמו בזמנים $r=0,1,\ldots,k-1$) לעת ההנפקה (המשמש כראשית) לפי תשואה השווה ל j(2). אחר כך נסכם את k הפרמיות המהוונות ונצבור אותן לזמן k, לפי תשואה השווה ל j(2). כתוצאה נקבל את ערך ההצטברות המבוקש של הפרמיות נטו .

דרך III : (נוסחה רקורסיבית)

הערך המצטבר של הפרמיות בזמן k $k=1,\ldots,n$, שווה לערך המצטבר של הפרמיות בזמן k-1 בתוספת הפרמיה כל זה צבור ביחידת זמן לפי תשואה ליחידת זמן השווה ל- j(1). הערך המצטבר של הפרמיות בזמן 0 שווה לאפס.(ולכן ניתן להשתמש בנוסחה הרקורסיבית)

חישוב תשואת מנפיק הפוליסה עם בעל הפוליסה פרש בזמן k וקיבל דמי פידיון, $k=1,\ldots,n$

נניח שבעל הפוליסה פרש בזמן k, $k=1,\ldots,n$, וקבל בזמן k את דמי הפידיון. למנפיק הפוליסה יש את התזרים הבא: תשלומי פרמיות **נטו** בזמנים $0,1,\ldots,k-1$, (בסימן חיובי) ותשלום דמי הפידיון בזמן k (בסימן שלילי). הריבית היחידה (במידה וקיימת) המאפסת את ערך תזרים המזומנים הנ"ל ביחס לנקודת זמן שרירותית היא התשואה אותה השיג מנפיק הפוליסה. את הריבית ניתן לחשב בעזרת חתירה למטרה. על מנת למצוא את התשואות לכל ערכי ה- k נשתמש במאקרו.

חישוב תשואת בעל הפוליסה עם בעל הפוליסה פרש בזמן k וקיבל דמי פידיון, $k=1,\ldots,n$

נניח שבעל הפוליסה פרש בזמן k, $k=1,\ldots,n$, וקבל בזמן k את דמי הפידיון. לבעל הפוליסה יש את התזרים הבא: תשלומי פרמיות בזמנים $0,1,\ldots,k-1$, (בסימן שלילי) ותשלום דמי הפידיון בזמן k (בסימן חיובי). הריבית היחידה (במידה וקיימת) המאפסת את ערך תזרים המזומנים הנ"ל ביחס נקודת זמן שרירותית היא התשואה אותה השיג בעל הפוליסה. את הריבית ניתן לחשב בעזרת חתירה למטרה. על מנת למצוא את התשואות לכל ערכי ה- k נשתמש במאקרו.

חישובים בגין קבלת דמי סילוקים

הרווח\ההפסד של מנפיק הפוליסה עם בעל הפוליסה פרש בזמן k וקיבל דמי סילוקים, $k=0,\ldots,n$

נניח שבעל הפוליסה פרש בזמן k, $k=0,\ldots,n$, ומנפיק הפוליסה יכול להפקיד כספים בתשואה j(1) ליחידת זמן.

מנפיק הפוליסה קיבל מבעל הפוליסה עד זמן k k פרמיות (בזמן k בעל הפוליסה לא משלם את הפרמיה). מנפיק הפוליסה מקזז מתשלומי הפרמיות את ההוצאות ויכול להשקיע את הפרמיות נטו במוסד פיננסי בתשואה j(1) ליחידת זמן.

לכן הרווח\ההפסד של מנפיק הפוליסה בזמן k, $k = 0, \dots, n$, נתון על ידי:

ערך ההצטברות של k הפרמיות נטו לפי תשואה j(1) מחושב בזמן n **פחות** דמי הסילוקים.

חישוב הצטברות הפרמיות נטו עד זמן k לפי תשואה j(1) מחושב בזמן הפרעון

: $k = 1, \dots, n$

מחשבים את הצטברות הפרמיות נטו עד זמן k (לא כולל זמן k) לפי ריבית שנתית השווה ל- j(1) (באחת מהדרכים שהוצגו בדיון על דמי הפידיון) ואת התוצאה צוברים לזמן הפרעון לפי ריבית שנתית השווה ל- j(1).

הרווח\ההפסד של בעל הפוליסה עם בעל הפוליסה פרש בזמן k וקיבל דמי סילוקים,

$k = 0, \dots, n$

נניח שבעל הפוליסה פרש בזמן k, $k = 0, \dots, n$, ובעל הפוליסה יכול להפקיד כספים בתשואה j(2) ליחידת זמן.

בעל הפוליסה משלם עד זמן k k פרמיות (בזמן k בעל הפוליסה לא משלם את הפרמיה) אותן יכול היה להפקיד במוסד פיננסי בתשואה j(2) ליחידת זמן.

לכן הרווח\ההפסד של מנפיק הפוליסה בזמן k, $k = 0, \dots, n$, נתון על ידי:

דמי הסילוקים בזמן הפרעון **פחות** ערך ההצטברות של k הפרמיות לפי תשואה j(2) מחושב בזמן הפרעון

חישוב הצטברות הפרמיות עד זמן k לפי תשואה j(2) מחושב בזמן הפרעון, $k = 1, \dots, n$ **:**

מחשבים את הצטברות הפרמיות עד זמן k (לא כולל זמן k) לפי ריבית

שנתית השווה ל- j(2) (באחת מהדרכים שהוצגו בדיון על דמי הפידיון) ואת התוצאה צוברים לזמן הפרעון לפי ריבית שנתית השווה ל- j(2).

חישוב תשואת מנפיק הפוליסה עם בעל הפוליסה פרש בזמן k וקיבל דמי סילוקים, $k=1,\dots,n$

נניח שבעל הפוליסה פרש בזמן k, $k=1,\dots,n$, וקבל בזמן הפרעון דמי הסילוקים. למנפיק הפוליסה יש את התזרים הבא: תשלומי פרמיות **נטו** בזמנים $0,1,\dots,k-1$ (בסימן חיובי) ותשלום דמי הסילוקים בזמן n (בסימן שלילי). הריבית היחידה (במידה וקימת) המאפסת את ערך תזרים המזומנים הנ"ל ביחס לנקודת זמן שרירותית היא התשואה אותה השיג מנפיק הפוליסה. את הריבית ניתן לחשב בעזרת חתירה למטרה. על מנת למצוא את התשואות לכל ערכי ה- k נשתמש במכשיר המקרו.

חישוב תשואת בעל הפוליסה אם הוא פרש בזמן k וקיבל דמי סילוקים, $k=1,\dots,n$

נניח שבעל הפוליסה פרש בזמן k, $k=1,\dots,n$, וקבל בעת הפרעון דמי סילוקים. לבעל הפוליסה יש את התזרים הבא: תשלומי פרמיות בזמנים $0,1,\dots,k-1$ (בסימן שלילי) ותשלום דמי סילוקים בזמן n (בסימן חיובי). הריבית היחידה (במידה וקימת) המאפסת את ערך תזרים המזומנים הנ"ל ביחס לנקודת זמן שרירותית היא התשואה אותה השיג בעל הפוליסה. את הריבית ניתן לחשב בעזרת חתירה למטרה. על מנת למצוא את התשואות לכל ערכי ה- k נשתמש במכשיר המקרו.

דוגמאות

דוגמה 1:

פוליסה בסכום מובטח של 100,000 ש"ח הונפקה ל- 15 שנה, בתמורה לתשלום פרמיות שנתיות מראש משך חיי הפוליסה. הפרמיות מחושבות לפי הבסיס: **ריבית:** שנתית השווה ל 8%, **הוצאה**

ראשונית: 1,000 ש"ח בתוספת 10% מהפרמיה הראשונה, **הוצאת חידוש:** 4% מגובה הפרמיה השניה ואילך, **הוצאת פירעון:** 100 ₪.

(א) חשב את גובה הפרמיה השנתית,

(ב) חשב את הערכים הרטרוספקטיביים והפרוספקטיביים של הפוליסה בזמן k, $k = 0,\ldots,15$.

דמי הפידיון בזמן k, $k = 0,\ldots,15$, שווים ל:

הצטברות 50% מהפרמיה הראשונה והצטברות 85% מיתר הפרמיות ששילם בעל הפוליסה לפני זמן k מחושב בזמן k לפי תשואה שנתית של 7%.

(ג) חשב את דמי הפידיון בזמן k עבור $k = 0,\ldots,15$,

(ד) חשב את הרווח /ההפסד של מנפיק פוליסה בזמן k, אם בעל הפוליסה מפסיק לשלם פרמיות בזמן k ומקבל את דמי הפידיון בזמן k, $k = 0,\ldots,15$. מנפיק הפוליסה יכול להשקיע כספים בתשואה של 8.5%.

(ה) חשב את הרווח /ההפסד של בעל פוליסה בזמן k, אם בעל הפוליסה מפסיק לשלם פרמיות בזמן k ומקבל את דמי הפידיון בזמן k, $k = 0,\ldots,15$. בעל הפוליסה יכול להשקיע כספים בתשואה של 7.5%.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 4"** בגיליון בשם **"דוגמה 1 "**.

(א)

ראשית נחשב את תזרים הפרמיות לפרמיה שנתית בגובה 1 ₪. את תזרים הוצאות החידוש לפרמיה שנתית בגובה 1 ₪, ואת תזרים ההטבה. שלושת התזרימים מהוונים לזמן הנפקת הפוליסה.

<u>תזרים הפרמיות</u>:

בעמודה C נחשב את תזרים הפרמיות לפרמיה שנתית בגובה 1 ₪ מהוון לעת הנפקת הפוליסה: בתא C8 נרשום: =1.08^-A8, נעתיק את התא C8 לתאים C9-C22, ובתא C5 נחשב את ערך התזרים בעת ההנפקה.

תזרים הוצאות החידוש:

בעמודה D נחשב את תזרים הוצאות החידוש לפרמיה שנתית בגובה 1 ₪ מהוון לעת הנפקת הפוליסה: בתא D8 נרשום: =0.1*1.08^-A8, בתא D9 נרשום: =0.04*1.08^-A8, נעתיק את התא D9 לתאים D10-D22, ובתא D5 נחשב את ערך התזרים בעת ההנפקה.

תזרים ההטבה

בתא E5 נחשב את תזרים **ההטבה ברוטו** (ההטבה בתוספת ההוצאה) בעת ההנפקה ונרשום: =100100*1.08^-A23.

עכשיו אנו מוכנים לחשב את הפרמיה.

חישוב הפרמיה

תהי P הפרמיה השנתית המבוקשת. ממשוואת הערך בעת ההנפקה נובע ש:

$P \cdot C5 = 1000 + P \cdot D5 + E5$.

נחשב, בתא C2, את ערך הפרמיה השנתית. נרשום בתא C2:

=(E5+1000)/(C5-D5) ונקבל את ערך הפרמיה השנתית המבוקשת,

חישוב פרמיה אלטרנטיבי:

בעמודה G נציג את תזרים **הפרמיות נטו**: לפרמיה שנתית בגובה 1 ₪.

בתא G8 נרשום: =0.9*1.08^-A8 , בתא G9 נרשום: =0.96*1.08^-A8, ונעתיק את התא G9 לתאים G10-G22. בתא G5 נחשב את ערך התזרים בעת ההנפקה.

ממשוואת הערך בעת ההנפקה נובע ש: $P\cdot G5=1000+E5$. נחשב בתא G3 את ערך הפרמיה השנתית המבוקשת: נרשום בתא G3:

=(E5+1000)/G5

חישוב פרמיה אלטרנטיבי:

בעמודה I נציג את תזרים **<u>הפרמיות נטו</u>** מחושב בעת הפירעון ביחס לפרמיה שרירותית. לאחר מכן, בעזרת **חתירה למטרה,** נמצא את הפרמיה הנדרשת. בתא I3 נרשום 4000, ערך פרמיה שנתי שרירותי. בתא I8 נרשום:

(0.9*$I$4-1000)*1.08^(15-A8)=, בתא I9 נרשום

(0.96*$I$4*1.08^(15-A9)=. את התא I9 נעתיק לתאים I10-I22,

בתא I5 נרשום: sum(I8:I22)=. בעזרת חתירה למטרה נמצא את גובה הפרמיה הנכון: **קבע בתא**: I5, **את הערך**: 100,100, **על ידי שינוי ערך התא**: I3. הפעלת חתירה למטרה נותנת את הפרמיה השנתית הרצויה.

(ב)

<u>ערכים רטרוספקטיביים</u>

בעמודה K נציג את הערכים הרטרוספקטיביים של הפוליסה בזמנים $k=0,\ldots15$.

כמות הכסף בקופה בזמן 0, לפני התשלומים בזמן 0, שווה לאפס לכן נרשום בתא K8: 0=.

כמות הכסף בקופה בזמן 1, לפני תשלומים בזמן 1, שווה לכמות הכסף בזמן 0 לפני התשלומים בזמן 0, כלומר הערך ב- K8, בהפחתת ההוצאה השקלית הראשונית השווה ל: 1,000 בתוספת הפרמיה הראשונה נטו (0.9P), כל זה מוכפל בפקטור ההצטברות ליחידת זמן. לכן בתא K9 נרשום: 1.08*(K8+0.9*C3-1000)=. כמות הכסף בזמן 2, לפני התשלומים בזמן 1, שווה לכמות הכסף בזמן 1 לפני התשלומים בזמן 1, כלומר הערך ב- K9, בתוספת הפרמיה נטו השניה (0.96P) כל זה מוכפל

בפקטור ההצטברות ליחידת זמן. לכן ב- K10 נרשום: 1.08*(K9+0.96*$C$3)=.
את התא K10 נעתיק לתאים K11-K23 ונקבל את ערכי הפוליסה הרטרוספקטביים.
נשים לב שבתא K23 קבלנו את המספר 100,100 גובה הסכום המובטח ברוטו,
בהתאם למצופה.

ערכים פרוספקטיביים

בעמודה L נציג את הערכים הפרוספקטיביים של הפוליסה בזמנים $k = 0,\ldots 15$.
מחויבות החברה ברוטו בזמן 15, בעת הפירעון, לאחר תשלומי הלקוח (השווים לאפס בזמן הפירעון) שווה ל 100,100 ש"ח. לכן נרשום בתא L23 100100=.
מחויבות החברה ללקוח בזמן 14, לאחר כל תשלומי הלקוח בזמן 14, שווה למחויבות החברה ללקוח בזמן 15 (K23) מהוונת ביחידת זמן (מזמן 15 לזמן 14) בתוספת ההוצאות בזמן 14 (0.04P) ובהפחתת הפרמיה P בזמן 14. לכן נרשום בתא K22: K23/1.08-0.96*$C$3=. את תא K22 נעתיק לתאים K9-K21. ערך מחויבות החברה בעת ההנפקה, לאחר כל התשלומים בזמן 0, שווה לערך המחויבות בזמן 1 מהוון ביחידת זמן (מזמן 1 לזמן 0) בתוספת ההוצאות בזמן 0 (0.1P+1,000) ובהפחתת הפרמיה P בזמן 0 . לכן נרשום בתא K8:
K9/1.08+1000-0.9*C3. נשים לב שבתא K8 קבלנו את הערך 0 בהתאם למצופה.

חישוב סימולטני של (א) ושל ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים

בתא N3 ננקוב במספר שרירותי המציין ערך שגוי של הפרמיה השנתית. בתאים N8-N23 נציג את ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים בהנחה שערך הפרמיה נתון בתא N3. על מנת לקבל בתא N23 את הערך 100,100 נשתמש בחתירה למטרה: **קבע בתא**: N23, **את הערך**: 100100, **על ידי שינוי ערך התא**: N3. הפעלת חתירה למטרה נותנת את הפרמיה השנתית הרצויה ואת התזרים הרטרוספקטיבי.

<u>חישוב סימולטני של (א) ושל ערכי הפוליסה הפרוספקטיביים</u>

בתא O3 ננקוב במספר שרירותי המציין ערך שגוי של הפרמיה השנתית. בתאים O8-N23 נציג את ערכי הפוליסה הפרוספקטיביים בהנחה שערך הפרמיה נתון בתא O3. על מנת לקבל בתא O8 את הערך 0 נשתמש בחתירה למטרה: **קבע בתא**: O8, **את הערך**: 0, **על ידי שינוי ערך התא**:O3. הפעלת חתירה למטרה נותנת את הפרמיה השנתית הרצויה ואת התזרים הפרוספקטיבי.

(ג)

<u>חישוב דמי הפידיון:</u>

נחשב ערכי תזרים רטרוספקטיבי של הפוליסה הנתונה עם פרמיה שנתית שחושבה בחלק (א) לפי הבסיס: **ריבית**: שנתית השווה ל- 7%, **הוצאה ראשונית**: 50% מהפרמיה שחושבה בחלק (א), **הוצאת חידוש**: 15% מהפרמיה שחושבה בחלק (א) מתשלום הפרמיה השני ואילך. ערך **דמי הפידיון** בזמן k שווה לערך התזרים בזמן k .

בעמודה Q נחשב את התזרים הרטרוספקטיבי המבוקש.

בתא Q8 נרשום את הערך 0 , בתא Q9 נרשום, =(Q8+0.5*$C$2)*1.07, בתא Q10 נרשום: =(Q9+0.85*$C$2)*1.07 את התא Q10 נעתיק לתאים Q11-Q23.

<u>חישוב אלטרנטיבי של דמי הפידיון:</u>

בעמודת העזר S נציג עבור $k=1,\ldots,15$ את החלק המתאים של הפרמיה ה- k מהוון לזמן ההנפקה לפי תשואה שנתית של 7%. בתא S8 נרשום: =0.5*$C$2*1.07^-A8, בתא S9 נרשום: =0.85*$C$2*1.07^-A9 את התא S9 נעתיק לתאים S10-S22.

בעמודה T נציג את דמי הפידיון. בתא T8 נציג את דמי הפידיון בזמן 0 ונרשום בתא 0. בתא T9 נציג את דמי הפידיון בזמן 1. נסכם את חלקי הפרמיות מהוונות לעת ההנפקה ששולמו עד זמן 1 (sum($S$8:S8)) ונצבור אותן לזמן 1 (1.07^A9) ולכן נרשום בתא T9: =sum($S$8:S8)*1.07^A9 ונעתיק אותו לתאים T10-T23.

(ד)

בעמודה V נחשב את התזרים הרטרוספקטיבי של הפוליסה עם הפרמיה שחושבה בחלק (א) על פי הבסיס לפיו חושבה הפרמיה בחלק (א) למעט ה**ריבית** השנתית השווה ל- 8.5% (לעומת 8% בבסיס המקורי).

בתא V8 נרשום 0 , בתא V9 נרשום =(V8+0.9*$C$2-1000)*1.085, בתא V10 נרשום: =(V8+0.96*$C$2)*1.085. את תא V10 נעתיק לתאים V11-V23.

בעמודה W נציג את הרווח\הפסד של מנפיק הפוליסה. בכל תא נפחית מערך התזרים הרטרוספקטי שחושב בעמודה V את דמי הפידיון אותם שילם המנפיק לבעל הפוליסה הפורש (עמודה T). בתא W8 נרשום: =V8-T8 ונעתיק את התא לתאים W9-W23.

<u>חישוב אלטרנטיבי של הרווח\הפסד של מנפיק הפוליסה:</u>

בעמודת העזר Y נציג עבור $k=1,\dots,15$ את ערך הנטו של הפרמיה ה- k מהוון לזמן ההנפקה לפי תשואה של 8.5%. בתא Y8 נרשום: =(0.9*$C$2-1000)*1.085^-A8, בתא Y9 נרשום: =0.96*$C$2*1.085^-A9 את התא Y9 נעתיק לתאים Y10-Y22.

בעמודה Z נציג את הצטברות הפרמיות נטו (פרמיה פחות הוצאה), אותן מקבל ומשקיע מנפיק הפוליסה לאחר קיזוז ההוצאות, לפי תשואה שנתית של 8.5% עד לפרישת בעל הפוליסה.

בתא Z8 נרשום בתא 0. בתא Z9 נרשום: =sum($Y$8:Y8)*1.085^A9 ונעתיק אותו לתאים Z10-Z23.

בעמודה AA נציג את הרווח\הפסד של מנפיק הפוליסה. בכל תא נפחית מהסכום שצבר המנפיק מתשלומי הפרמיות נטו (עמודה Z) את דמי הפידיון אותן שילם המנפיק לבעל הפוליסה הפורש (עמודה T). בתא AA8 נרשום: =Z8-T8 ונעתיק את התא לתאים AA9-AA23.

(ה)

בעמודה AC נציג תזרים רטרוספקטיבי של הפוליסה עם הפרמיה שחושבה בחלק (א) לפי הבסיס: **ריבית**: שנתית השווה ל- 7.5% (ללא כל הוצאות) בתא AC8 נרשום 0 , בתא AC9 נרשום 1.075*(AC8+C$2)=, את תא AC9 נעתיק לתאים AC10-AC23.

בעמודה AD נציג את הרווח\הפסד של בעל הפוליסה. בכל תא נפחית מדמי הפידיון אותם שילם המנפיק לבעל הפוליסה הפורש (עמודה T) את הסכום שהיה יכול לצבור בעל הפוליסה מתשלומי הפרמיות (עמודה AC). בתא AD8 נרשום: T8-AC8= ונעתיק את התא לתאים AD9-AD23.

<u>חישוב אלטרנטיבי של הרווח\הפסד של בעל הפוליסה:</u>

בעמודת העזר AF נציג עבור $k=1,\ldots,15$ את ערך הנטו של הפרמיה ה- k מהוון לזמן ההנפקה לפי תשואה של 7.5%. בתא AF8 נרשום: C$2*1.075^-A8$, את התא AF8 נעתיק לתאים AF9-AF22.

בעמודה AG נציג את הצטברות הפרמיות אותן היה יכול בעל הפוליסהלהשקיע לפי תשואה שנתית של 7.5%. בתא AG8 נרשום בתא 0. בתא AG9 נרשום: sum($AF$8:AF8)*1.075^A9= ונעתיק אותו לתאים AG10-AG23.

בעמודה AH נציג את הרווח\הפסד של בעל הפוליסה. בכל תא נפחית מדמי הפידיון אותן שילם המנפיק לבעל הפוליסה הפורש (עמודה T) את הסכום שיכול היה לצבור בעל הפוליסה מתשלומי הפרמיות נטו, (עמודה AG). בתא AH8 נרשום: T8-AG8= ונעתיק את התא לתאים AH9-AH23.

דוגמה 2:

פוליסה בערך מובטח של 100,000 ש"ח מונפקת ל- 15 שנה. בתמורה לפרמיות שנתיות המשולמות מראש ומחושבות על פי הבסיס: **ריבית:** שנתית השווה ל 8%, **הוצאה ראשונית:** 1,000 ש"ח בתוספת 10% מתשלום הפרמיה הראשונה, **הוצאת חידוש:** 50 ש"ח בתוספת אחוז משתנה באופן ליניארי של הפרמיה כאשר בזמן 1 הוא 2.5% ובזמן 14 (עת התשלום האחרון

של הפרמיה) הוא 5% .

(א) חשב את גובה הפרמיה השנתית,

(ב) חשב את הערך הרטרוספקטיבי והפרוספקטיבי של הפוליסה בזמן k, $k=0,\ldots,15$.

דמי הפידיון בזמן k, $k=0,\ldots,15$, שווה למכסימום של שני הסכומים הבאים :

(I) הצטברות 50% מהפרמיה הראשונה ו 95% מיתר הפרמיות ששילם

בעל הפוליסה לפני זמן k מחושב בזמן k לפי תשואה שנתית של 6%.

(II) 90% מערך הפוליסה בזמן k,

(ג) חשב את דמי הפידיון בזמן k עבור $k=0,\ldots,15$,

(ד) הלקוח מפסיק לשלם פרמיות בזמן k ומקבל את דמי הפידיון בזמן k. עבור $k=1,\ldots,15$ חשב

את התשואה של מנפיק החברה על העסקה,

(ה) הלקוח מפסיק לשלם פרמיות בזמן ומקבל את דמי הפידיון בזמן k. עבור $k=1,\ldots,15$ חשב

את התשואה של הלקוח על העסקה.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 4"** בגיליון בשם **"דוגמה 2 "**.

יהי $a+b\cdot k$ אחוז הוצאות החידוש מהפרמיה השנתית בזמן k, $k=1,\ldots,14$.

חישוב a ו b.

נקבל שתי משוואות בשני נעלמים: $0.025=a+b$, $0.05=a+14\cdot b$.

את שתי המשוואות בשני הנעלמים אפשר לפתור בעזרת אלגברת מטריצות: את שתי

המשוואות נציג סימולטנית בכתיב מטריצות באופן הבא: $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.025\\ 0.050\end{pmatrix}$. את

הפתרון נציג בכתיב מטריצות באופן הבא: $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 14\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0.025\\ 0.050\end{pmatrix}$.

נעבור לחישוב ב- Excel:

בתאים C2-D3 נציג את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 14\end{pmatrix}$, בתאים E2-E3

נציג את הוקטור $c=\begin{pmatrix}0.025\\ 0.050\end{pmatrix}$. בתאים C7-D8 נציג את המטריצה

ההופכית של A. נצבע את התאים C7-D8 ונרשום בתא C7:

(minverse (C2:D3 = ונלחץ ביחד על Ctrl-Shift-Enter. (minverse

הוא קיצור ל: matrix inverse).

על סמך המשוואה $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 14\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0.025\\ 0.050\end{pmatrix}$ נחשב בתאים D4-D5 את

ערכי הוקטור $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$. נצבע את התאים D4-D5 ונרשום:

(mmult (C7:D8,E2:E3= ונלחץ ביחד על Ctrl-Shift-Enter,ונקבל

בתאים D4-D5 את ערכי הוקטור $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$. (mmult הוא קיצור ל:

matrix multiplication).

הפתרון ה "סטנדרטי" של שתי המשוואות בשני נעלמים נתון על ידי: $b=0.025\cdot\frac{1}{13}$, $a=0.025\cdot\frac{12}{13}$,

לכן $a+b\cdot k=\frac{0.025}{13}\cdot(12+k)$.

חישוב אחוזי חידוש:

בעמודה G נרשום את אחוזי הוצאות החידוש מתשלומי הפרמיות. בתא G9

נרשום: 0.025*(12+A9)/13= ונעתיק את התא לתאים G10-G22. (בתא G9

חייבים לקבל 0.025, ובתא G22 חייבים לקבל 0.05)

(א)

בתא J2 נרשום 4000, ערך שרירותי שגוי של הפרמיה השנתית, בעמודה J ניצור את תזרים הפרמיות השנתיות נטו מחושב בעת הפירעון. בתא J8 נרשום:

(H8*J2-1000)*1.08^(15-A8)= בתא J9 נרשום:

(H9*$J$2-50)*1.08^(15-A9)=, ונעתיק אותו לתאים J10-J22.

את ערך התזרים בעת הפירעון נחשב בתא J7, בו נסכם את הערכים שהתקבלו בתאים J8-J22 .

בעזרת חתירה למטרה נמצא את גובה הפרמיה הנכון: : **קבע בתא**: J7**את הערך**: 100,000, **על ידי שינוי ערך התא**: J2. הפעלת חתירה למטרה נותנת את הפרמיה השנתית הרצויה.

חישוב אלטרנטיבי של ערך הפרמיה:

בעמודה L נרשום את תזרים ההוצאות השקליות מהוון לזמן ההנפקה. בתא L8 נרשום 1000=, בתא L9 נרשום 50*1.08^-A9=, נעתיק את התא L9 לתאים L10-L22, ובתא L7 נחשב את ערך תזרים ההוצאות ביחס לזמן ההנפקה.

בעמודה M נרשום את תזרים הפרמיות נטו מהוון לזמן ההנפקה לפרמיה בגובה 1 ₪. בתא M8 נרשום H8*1.08^-A8. את התא M8 נעתיק לתאים M9-M22, ובתא M7 נחשב את ערך תזרים הפרמיות נטו ליחידת פרמיה בזמן ההנפקה .

בתא N7 נחשב את ערך תזרים ההטבות ביחס לזמן ההנפקה ונרשום:

100000*1.08^-A23.

תהי P הפרמיה המבוקשת אז ממשואת הערך בעת ההנפקה נובע ש:

P*M7=N7+L7. נחשב את P בתא L3 ונרשום: (N7+L7)/M7=.

(ב)

<u>ערכים רטרוספקטיביים</u>

בעמודה P נציג את הערכים **הרטרוספקטיביים** של הפוליסה בזמנים $k = 0,\ldots 15$.

כמות הכסף בקופה בזמן 0, לפני התשלומים בזמן 0, שווה לאפס לכן נרשום בתא P8: 0=. כמות הכסף בקופה בזמן 1, לפני תשלומים בזמן 1, שווה לכמות הכסף בזמן 0 לפני התשלומים בזמן 0, כלומר הערך ב- P8, בתוספת הפרמיה נטו (0.9P) ובהפחתת ההוצאה השקלית הראשונית 1,000, כל זה מוכפל בפקטור ההצטברות ליחידת זמן. לכן ב- P9 נרשום: 1.08*(P8+H8*J2-1000)=.

כמות הכסף בזמן 2, לפני התשלומים בזמן 1, שווה לכמות הכסף בזמן 1 לפני התשלומים בזמן 1, כלומר הערך ב- P9, בתוספת הפרמיה נטו (H9*P) כל זה מוכפל בפקטור ההצטברות ליחידת זמן. לכן נרשום ב- P10:

. =(P9+H9*$J$2-50)*1.08

את התא P10 נעתיק לתאים P11-P23 ונקבל את ערכי הפוליסה רטרוספקטביים. נשים לב שבתא P23 קבלנו את המספר 100,000 גובה הסכום המובטח, בהתאם למצופה.

<u>ערכים פרוספקטיביים</u>

בעמודה Q נציג את הערכים **הפרוספקטיביים** של הפוליסה בזמנים $k = 0,\ldots 15$.

מחויבות החברה ללקוח בזמן 15, בעת הפירעון, לאחר כל תשלומי הלקוח (השווים לאפס בזמן הפירעון) שווה ל 100,000 ש"ח. לכן נרשום בתא Q23: 100000=. מחויבות החברה ללקוח בזמן 14, לאחר כל תשלומי הלקוח בזמן 14, שווה למחויבות החברה בזמן 15 (Q23) מהוונת ביחידת זמן (מזמן 15 לזמן 14) בהפחתת תשלום הפרמיה נטו בזמן 14 (H22*P) בתוספת ההוצאה השקלית השווה ל 50 ש"ח. לכן נרשום בתא Q22: Q23/1.08-H22*$J$2+50. את תא Q22 נעתיק לתאים Q9-Q21. ערך מחויבות החברה בעת ההנפקה, לאחר כל התשלומים בזמן 0, שווה לערך המחויבות בזמן 1 מהוון ביחידת זמן (מזמן 1 לזמן

0) בהפחתת הפרמיה נטו בזמן 0 (0.9P) ובתוספת ההוצאה הראשונית 1,000 ש"ח. לכן נרשום בתא Q8: Q9/1.08+1000-0.9*J2.

נשים לב שבתא Q8 קבלנו את הערך 0 בהתאם למצופה.

חישוב סימולטני של (א) ושל ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים

בתא S3 ננקוב במספר שרירותי המציין ערך שגוי של הפרמיה השנתית.

בתאים S8-S23 נציג את ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים בהנחה שערך הפוליסה נתון בתא S3. על מנת לקבל בתא S23 את הערך 100,000 נשתמש בחתירה למטרה: **קבע בתא**: S23, **את הערך**: 100000, **על ידי שינוי ערך התא**: S3.

הפעלת חתירה למטרה נותנת את הפרמיה השנתית הרצויה.

חישוב סימולטני של (א) ושל ערכי הפוליסה הפרוספקטיביים

בתא T3 נרשום מספר שרירותי המציין ערך שגוי של הפרמיה השנתית. בתאים T8-T23 נציג את ערכי הפוליסה הפרוספקטיביים בהנחה שערך הפוליסה נתון בתא T3. על מנת לקבל בתא T8 את הערך 0 נשתמש בחתירה למטרה: **קבע בתא**: T8, **את הערך**: 0, **על ידי שינוי ערך התא**: T3.

(ג)

בעמודה V נחשב את הערכים הרטרוספקטיביים עם הפרמיה שחושבה בחלק (א) על פי הבסיס: **ריבית**: 6%, **הוצאה ראשונית**: 50% מהפרמיה הראשונה, **הצאת חידוש**: 5% מהפרמיה השניה ואילך.

בתא V8 נרשום 0, בתא V9 נרשום =(V8+0.5*J2)*1.06 , בתא V10 נרשום: =(V9+0.95*$J$2)*1.06. את התא V10 נעתיק לתאים V11-V23.

בעמודה W נציג את דמי הפידיון. בתא W8 נרשום: =max(V8,0.9*P9) ונעתיק את התא לתאים W9-W23.

חישוב אלטרנטיבי של חלק (I) של דמי הפידיון.

בעמודה Yנהוון את 50% מהפרמיה הראשונה ו 95% מיתר הפרמיות לעת ההנפקה לפי תשואה של 6%. בתא Y8 נרשום: =0.5*J2*1.06^-A8, בתא Y9 נרשום: =0.95*$J$2*1.06^-A9. את תא Y9 נעתיק לתאים Y10-Y23.

בעמודה Z נציג את ערכי חלק (I) של דמי הפידיון. בתא Z9 נרשום: =sum($Y$8:Y8)*1.06^A9 ונעתיק את התא לתאים Z10-Z23.

(ד)

בתא AB2 ננקוב ריבית שרירותית ובתאים AB8-AB23 נציג את ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים עם הפרמיה שחושבה בחלק (א) על פי הבסיס לפיו חושבה הפרמיה למעט ה**ריבית** השנתית השווה לריבית השנתית השרירותית בתא AB2.

בתאים AC8-AC23 נציג את ההפרש בין הערכים בעמודה AB (ערכי הכסף שהצטברו עבור המנפיק לפי הריבית השרירותית) לבין הערכים בעמודה W (דמי הפידיון: ערכי הכסף ששילם המנפיק) בהתאמה. בתא AC8 נרשום: =AB8-W8 ונעתיק אותו לתאים AC9-AC23.

לכל אחד מהתאים AC9-AC23 נמצא, בעזרת חתירה למטרה, את הריבית שתאפס את הערך בתא. על מנת לבצע זאת לתאים AC9-AC23 נשתמש במקרו. (מקרו מס 3)

חישוב אלטרנטיבי של התאים AB8-AB23.

בתאים AF8-AF23 נציג את ערכי הפרמיות נטו מהוונות לפי ריבית שרירותית הנתונה בתא AF3.

בתאים AG9-AG23 נסכם את האיברים המתאימים בעמודה AF ונצבור אותם לפי הריבית השרירותית ונקבל את הערכים שקבלנו בתאים AB9-AB23 .

(ה)

בתא AI2 ננקוב בריבית שרירותית ובתאים AI8-AI23 נציג את ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים עם הפרמיה שחושבה בחלק (א) על פי הבסיס: **ריבית:** שנתית הנתונה בתא AI2, **הוצאות:** אין הוצאות .

בתאים AJ8-AJ23 נציג את ההפרש לבין הערכים בעמודה W (דמי הפידיון: ערכי הכסף שקבל בעל הפוליסה) לבין הערכים בעמודה AJ (ערכי הכסף שיכלו להצטבר עבור בעל הפוליסה לפי הריבית השרירותית) בהתאמה. בתא AJ8 נרשום: =W8-AI8 ונעתיק אותו לתאים AJ9-AJ23.

לכל אחד מהתאים AJ9-AJ23 נמצא, בעזרת חתירה למטרה, את הריבית שתאפס את הערך בתא. על מנת לבצע זאת לתאים AJ9-AJ23 נשתמש במקרו. (מקרו מס 4)

חישוב אלטרנטיבי של התאים AI8-AI23.

בתאים AM8-AM23 נציג את ערכי הפרמיות מהוונות לפי ריבית שרירותית הנתונה בתא AM4. בתאים AN9-AN23 נסכם את האיברים המתאימים בעמודה AM ונצבור אותם לפי הריבית השרירותית ונקבל את הערכים שקבלנו בתאים AI9-AI23 .

דוגמה 3:

ב- 1.4.1973 הונפקה פוליסה ל- 30 שנה בערך מובטח של 600,000 ש"ח. הפרמיות הן שנתיות, מחושבות על פי הבסיס: **ריבית:** שנתית השווה ל- 8% בחמש השנים הראשונות, ל- 7% בעשר השנים העוקבות ול – 6% ביתרת הזמן. **הוצאה ראשונית:** 50% מערך הפרמיה הראשונה, **הוצאת חידוש:** 2% מערך הפרמיה החל מהפרמיה השניה.

(א) חשב את גובה הפרמיה השנתית,

(ב) חשב את הערך הרטרוספקטיבי והפרוספקטיבי של הפוליסה בזמן k, $k = 0,\dots,30$.

דמי הסילוקים שווה למכסימום שבין שני הסכומים הבאים:

(I) הסכום המובטח מוכפל באחוז הפרמיות ששולמו,

(II) הצטברות של 50% מהפרמיה הראשונה ושל 97% מיתר הפרמיות מזמן

הפרישה ועד זמן הפרעון לפי תשואה שנתית השווה ל- 5.5%.

(ג) חשב את דמי הסילוקים של הבעל הפוליסה הפורש בזמן k , עבור $k = 0,1,\dots,30$,

(ד) חשב את הרווח /ההפסד של מנפיק פוליסה בזמן k, אם בעל הפוליסה מפסיק לשלם פרמיות בזמן k ומקבל את דמי הסילוקים בזמן n , $k = 0,1,\dots,30$. מנפיק הפוליסה יכול להשקיע כספים במודל ריבית הקבועה למקוטעין לפיה חושבה הפרמיה השנתית.

(ה) חשב את הרווח /ההפסד של בעל פוליסה בזמן k, אם בעל הפוליסה מפסיק לשלם פרמיות בזמן k ומקבל את דמי הסילוקים בזמן n, $k = 0,1,\dots,30$. בעל הפוליסה יכול להשקיע כספים בתשואה של 6.6%.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 4"** בגיליון בשם **"דוגמה 3 "**.

בעמודה C נציג את הריביות השונות. בתאים C9-C13 נרשום 1.08= (על ידי Copy-Past), בתאים C14-C23 נרשום 1.07=, ובתאים C24-C38 נרשום 1.06=. בעמודה D נציג את פונקצית ההיוון. בתא D8 נרשום 1=, בתא D9 נרשום D8/C9= ונעתיק את התא D9 לתאים D10-D38. בתאים E8-E38 נציג את השנים 1973-2003.

(א)

בעמודה G נציג את ערכי הפרמיות נטו מהוונים לעת ההנפקה. בתא G8 נרשום: 0.5*D8=, בתא G9 נרשום: 0.98*D9= ונעתיק את התא G9 לתאים G10-G38. בתא G7 נחשב את ערך תזרים הפרמיות נטו. בעמודה H נציג את ערך ההטבה ונרשום בתא H7: 600,000*D38=.

בתא G3 נחשב את הפרמיה ונרשום: H7/G7=.

(ב)

ערכים רטרוספקטיביים

בעמודה H נציג את הערכים **הרטרוספקטיביים** של הפוליסה בזמנים $k = 0,\dots 30$.

כמות הכסף בקופה בזמן 0, לפני התשלומים בזמן 0, שווה לאפס לכן נרשום בתא J8: 0=. כמות הכסף בקופה בזמן 1, לפני תשלומים בזמן 1, שווה לכמות הכסף בזמן 0 לפני התשלומים בזמן 0, כלומר הערך ב- J8, בתוספת הפרמיה נטו (0.5P) כל זה מוכפל בפקטור ההצטברות ליחידת זמן. לכן ב- J9 נרשום: C9*(H8+0.5*G3)=. כמות הכסף בזמן 2, לפני התשלומים בזמן 1, שווה לכמות הכסף בזמן 1 לפני התשלומים בזמן 1, כלומר הערך ב- J9, בתוספת הפרמיה נטו (0.98P) כל זה מוכפל בפקטור ההצטברות ליחידת זמן. לכן נרשום ב- : J10 :C10*(J9+0.98*$G$3)= .

את התא J10 נעתיק לתאים J11-J38 ונקבל את ערכי הפוליסה הרטרוספקטביים. נשים לב שבתא J38 קבלנו את הטבת הפרעון בגובה 600,000 בהתאם למצופה.

ערכים פרוספקטיביים

בעמודה K נציג את הערכים **הפרוספקטיביים** של הפוליסה בזמנים $k = 0,\ldots 30$.

מחויבות החברה ללקוח בזמן 30, בעת הפירעון, לאחר כל תשלומי הלקוח (השווים לאפס בזמן הפירעון) שווה ל 600,000 ש"ח. לכן נרשום בתא K38: 600000=. מחויבות החברה ללקוח בזמן 29, לאחר כל תשלומי הלקוח בזמן 29, שווה למחויבות החברה בזמן 30 (K38) מהוונת ביחידת זמן (מזמן 30 לזמן 29)בהפחתת תשלום הפרמיה נטו בזמן 29 (0.98P). לכן נרשום בתא K37: K38/C38-0.98*$G$3. את תא K37 נעתיק לתאים K9-K36. ערך מחויבות החברה בעת ההנפקה, לאחר כל התשלומים בזמן 0, שווה לערך המחויבות בזמן 1 מהוון ביחידת זמן (מזמן 1 לזמן 0) בהפחתת הפרמיה נטו בזמן 0 (0.5P). לכן נרשום בתא K8: K9/C9-0.5*G3. נשים לב שבתא K8 קבלנו את הערך 0 בהתאם למצופה.

חישוב סימולטני של (א) ושל ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים

בתא M4 נרשום מספר שרירותי המציין ערך שגוי של הפרמיה השנתית. בתאים M8-M38 נציג את ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים בהנחה שערך הפוליסה נתון בתא M4. על מנת לקבל בתא M38 את הערך 600,000 נשתמש בחתירה למטרה: **קבע בתא**: M38, **את הערך**: 600,000, **על ידי**

שינוי ערך התא: M4. הפעלת חתירה למטרה נותנת את הפרמיה השנתית הרצויה ואת התזרים הרטרוספקטיבי הנדרש.

חישוב סימולטני של (א) ושל ערכי הפוליסה הפרוספקטיביים

בתא N4 נרשום מספר שרירותי המציין ערך שגוי של הפרמיה השנתית. בתאים N8-N38 נציג את ערכי הפוליסה הפרוספקטיביים בהנחה שערך הפוליסה נתון בתא N4. על מנת לקבל בתא N8 את הערך 0 נשתמש בחתירה למטרה: **קבע בתא**: N8, **את הערך**: 0, **על ידי שינוי ערך התא**: N4. הפעלת חתירה למטרה נותנת את הפרמיה השנתית הרצויה ואת התזרים הפרוספקטיבי הנדרש.

(ג)

בתאים P8-P38 נחשב את התזרים הרטרוספקטיבי עם הפרמיה שחושבה בחלק (א) לפי הבסיס: **ריבית**: שנתית השווה ל 5.5%, **הוצאה ראשונית**: 50% מהפרמיה הראשונה, **הוצאת חידוש**: 3% מכל פרמיה החל מהפרמיה השניה.

בעמודה Q נחשב את ערכי הסכום **(II)**. בעמודה Q נצבור את ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים שחושבו בעמודה P לעת הפרעון . בתא Q8 נרשום: =P8*1.055^(30-A8) ונעתיק את התא לתאים Q9-Q38.

בתאים R8-R38 נחשב את ערכי הסכום **(I)**. בתא R8 נרשום: =600000*A8/30 ונעתיק את התא לתאים R9-R38.

בתאים S8-S38 נציג את דמי הסילוקים. בתא S8 נרשום: =max(Q8,R8), ונעתיק את התא לתאים S9-S38, ונקבל את דמי הסילוקים.

חישוב אלטרנטיבי של הסכום (II)

בתאים U8-U38 נצבור את הפרמיות לעת הפרעון. בתא U8 נרשום: =0.5*G3*1.055^(30-A8), ובתא U9 נרשום: =0.97*$G$3*1.055^(30-A9). את התא U9 נעתיק לתאים U10-U37.

בתאים V8-V38 נחשב את הסכומים המתאימים ל (II) על ידי סכום תאי העמודה U. בתא V9 נרשום: =sum($U$8:U8) ונעתיק את התא לתאים V9-V38.

חישוב אלטרנטיבי של הסכום (II)

בתאים X8-X38נחשב את הסכום (II) המתאים לזמן פרישה k בעזרת נוסחת רקורסיה:

לסכום (II) המתאים לזמן פרישה k-1 נוסיף את חלק הפרמיה המתאים לזמן k-1 ונצבור אותו לזמן הפרעון ונקבל את הסכום (II) המתאים לזמן k.

בתא X8 נרשום 0=, בתא X9 נרשום: X8+0.5*G3*1.055^(30-A8)=, ובתא X10 נרשום: X9+0.97*$G$3*1.055^(30-A9). את תא X10 נעתיק לתאים X11-X38.

(ד)

בתאים Z8-Z38 נצבור לזמן הפרעון את ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים שחושבו בעמודה J. בתא Z8 נרשום: J8*D8/$D$38 ונעתיק את התא Z9-Z38.

בתאים AA8-AA38 נציג את הרווח\הפסד של מנפיק הפוליסה. בתא AA8 נרשום: Z8-S8 ונעתיק את התא לתאים AA9-AA38.

הערה:

את ערכי התאים Z8-Z38 ניתן לחשב בשתי דרכים אלטרנטיביות הדומות לאלו שהוצגו בעמודות V ו X. (החישוב בעמודה AD מקביל חישוב בעמודה V, והחישוב בעמודה AF מקביל לחישוב בעמודה X).

(ה)

בתאים AH8-AH38 נחשב את ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים עם הפרמיה שחושבה בחלק (א) לפי הבסיס: **ריבית**: שנתית השווה ל 6.6%, (ללא הוצאות).

בתאים AI8-AI38 נצבור לזמן הפרעון את ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים שחושבו בעמודה AH.

בתא AI8 נרשום: AH8 *1.066^(30-A8) ונעתיק את התא AI9-AI38.

בתאים AJ8-AJ38 נציג את הרווח\הפסד של בעל הפוליסה. בתא AJ8 נרשום: S8-AI8 ונעתיק את התא לתאים AJ9-AJ38.

הערה:

את ערכי התאים AI8-AI38 ניתן לחשב בשתי דרכים אלטרנטיביות הדומות לאלו שהוצגו בעמודות V ו-X . (החישוב בעמודה AM מקביל חישוב בעמודה V, והחישוב בעמודה AO מקביל לחישוב בעמודה X).

דוגמה 4:

פוליסה בערך מובטח של 100,000 ש"ח הונפקה ל- 25 שנה. הפרמיות משולמות רבעונית ומחושבות על פי מודל הריבית: $v(t) = 0.2 \cdot 1.25^{-t} + 0.8 \cdot 1.08^{-t}$.

(א) חשב את גובה הפרמיה הרבעונית,

(ב) חשב את הערך הרטרוספקטיבי והפרוספקטיבי של הפוליסה בזמן k, $k = 0,\ldots,100$.

דמי הסילוקים השווה למכסימום שבין שני הסכומים הבאים:

(I) 90% מערך הפוליסה בעת הפרישה,

(II) הצטברות, עד זמן הפרעון, של 50% מהפרמיה הראשונה ושל 85% מיתר הפרמיות ששולמו טרם הפרישה במודל הריבית $v(t) = 0.2 \cdot 1.25^{-t} + 0.8 \cdot 1.08^{-t}$.

(ג) חשב את דמי הסילוקים של הבעל הפוליסה הפורש בזמן k , עבור $k = 0,\ldots,100$,

(ד) הלקוח מפסיק לשלם פרמיות בזמן k ומקבל את דמי הסילוקים בזמן n , $k = 1,\ldots,100$. חשב את התשואה של מנפיק החברה על העסקה,

(ה) הלקוח מפסיק לשלם פרמיות בזמן k ומקבל את ערך הפידיון בזמן n , $k = 1,\ldots,100$. חשב את התשואה של הלקוח על העסקה.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 4"** בגיליון בשם **"דוגמה 4 "**.

בעמודה C נרשום את זמני תשלום הפרמיות כאשר יחידת הזמן שווה לשנה, שהיא יחידת הזמן במודל הריבית הנתון. (לא נשתמש כרגיל בעמודה A לקביעת זמני תשלום הפרמיות). בתא C8 נרשום =0, בתא C9 נרשום: =C8+0.25, ונעתיק את התא C9 לתאים C10-C108.

בעמודה D נציג את טור ההיוון (שהוא גם במקרה זה לעמודת תזרים תשלומי הפרמיות ליחידת פרמיה מהוונים לעת ההנפקה). נרשום בתא D8: =0.2*1.25^-C8+0.8*1.08^-C8,

את התא D8 נעתיק לתאים D9-D108.

(א)

בתא D7 נציג את ערך תזרים הפרמיות נטו ליחידת פרמיה.

בתא E7 נציג את ערך תזרים ההטבות ונרשום: =100000*D108.

תהי P הפרמיה המבוקשת אז ממשואת הערך בעת ההנפקה נובע ש: P*D7=E7. נחשב את P בתא C3 ונרשום בתא AS3: =E7/D7.

(ב)

בעמודה G נציג את גורמי ההצטברות ליחידות הזמן (רבע שנה) השונות. בתא G9 נרשום: =D8/D9 ונעתיק את התא לתאים G10-G108.

ערכים רטרוספקטיביים

בעמודה H נציג את הערכים **הרטרוספקטיביים** של הפוליסה בזמנים $k = 0,\ldots 108$. כמות הכסף בקופה בזמן 0, לפני התשלומים בזמן 0, שווה לאפס לכן נרשום בתא H8 =0. כמות הכסף בקופה בזמן 1, לפני תשלומים בזמן 1, שווה לכמות הכסף בזמן 0 לפני התשלומים בזמן 0, כלומר הערך ב- H8, בתוספת הפרמיה נטו (P) כל זה מוכפל בפקטור ההצטברות ליחידת זמן מ-0 ל-1: G9. לכן ב- H9 נרשום: (H8+$C$3)*G9. את התא H9 נעתיק לתאים H10-H108 ונקבל את ערכי הפוליסה הרטרוספקטביים. נשים לב שבתא H108 קבלנו את המספר 100,000 גובה הסכום המובטח, בהתאם למצופה.

ערכים פרוספקטיביים

בעמודה I נציג את הערכים **הפרוספקטיביים** של הפוליסה בזמנים $k = 0,\ldots 108$. מחויבות החברה בזמן 108, בעת הפירעון, לאחר כל תשלומי הלקוח (השווים לאפס בזמן הפירעון) שווה ל 100,000 ש"ח. לכן נרשום בתא I108: =100000. מחויבות החברה ללקוח בזמן 107, לאחר כל

תשלומי הלקוח בזמן 107, שווה למחויבות החברה בזמן 108 (I108) מהוונת ביחידת זמן (מזמן 108 לזמן 1/G108:107) בהפחתת תשלום הפרמיה בזמן 107 (P). לכן נרשום בתא I107: I108/G108-$C$3. את תא I107 נעתיק לתאים I106-I8. נשים לב שבתא I8 קבלנו את הערך 0 כמצופה.

חישוב סימולטני של (א) ושל ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים

בתא K4 נרשום מספר שרירותי המציין ערך שגוי של הפרמיה השנתית. בתאים K8-K108 נציג את ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים בהנחה שערך הפוליסה נתון בתא K4. על מנת לקבל בתא K108 את הערך 100,000 נשתמש בחתירה למטרה: **קבע בתא**: K108, **את הערך**: 100000, **על ידי שינוי ערך התא**: K4. הפעלת חתירה למטרה נותנת את הפרמיה השנתית הרצויה.

חישוב סימולטני של (א) ושל ערכי הפוליסה הפרוספקטיביים

בתא L4 נרשום מספר שרירותי המציין ערך שגוי של הפרמיה השנתית. בתאים L8-L108 נציג את ערכי הפוליסה הפרוספקטיביים בהנחה שערך הפוליסה נתון בתא L4. על מנת לקבל בתא L8 את הערך 0 נשתמש בחתירה למטרה: **קבע בתא**: L8, **את הערך**: 0, **על ידי שינוי ערך התא**:L4.

(ג)

בתאים N8-N108 נחשב את התזרים הרטרוספקטיבי עם הפרמיה שחושבה בחלק (א) לפי הבסיס: **ריבית**: מודל הריבית הכללית לפיו חושבה הפרמיה בחלק (א) **הוצאה ראשונית**: 50% מהפרמיה הראשונה, **הוצאת חידוש**: 15% מכל פרמיה החל מהפרמיה השניה.

בעמודה O נחשב את ערכי הסכום (**II**). בעמודה O נצבור את ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים שחושבו בעמודה N לעת הפרעון. בתא O8 נרשום: =N8*D8/$D$108 ונעתיק את התא לתאים O9-O108.

בתאים P8-P108 נחשב את ערכי הסכום (**I**). בתא P8 נרשום: =0.9*H8 ונעתיק את התא

לתאים P9-P108.

בתאים Q8-Q108 נציג את דמי הסילוקים. בתא Q8 נרשום: =max(P8,O8), ונעתיק את התא לתאים Q9-Q108, ונקבל את דמי הסילוקים.

חישוב אלטרנטיבי של הסכום (II)

בתאים S8-S107 נצבור את הפרמיות לעת הפרעון. בתא S8 נרשום:

=0.5*$C$3*D8/$D$108 בתא S9 נרשום: =0.85*$C$3*D8/$D$108.

את התא S9 נעתיק לתאים S10-S107.

בתאים T8-T108 נחשב את הסכומים המתאימים ל (**II**) על ידי סכום תאי העמודה S. בתא T9נרשום: =sum($S$8:S8) ונעתיק את התא לתאים V9-V38.

חישוב אלטרנטיבי של הסכום (II)

בתאים V8-V108 נציג את הסכום (**II**) המתאים לזמן פרישה k בעזרת נוסחת רקורסיה: לסכום (II) המתאים לזמן פרישה k-1 נוסיף את חלק הפרמיה המתאים לזמן k-1 ונצבור אותו לזמן הפרעון ונקבל את הסכום (II) המתאים לזמן k.

בתא V8 נרשום 0=, בתא V9 נרשום: =V8+0.5*C3*D8/D108, ובתא V10 נרשום: =V9+0.85*$C$3*D9/$D$108 את תא V10 נעתיק לתאים V11-V108.

(ד) + (ה)

מאחר ואין בבסיס חישוב הפרמיה מרכיב הוצאות חישוב התשואה למנפיק הפוליסה ולבעל הפוליסה זהים ולכן אנו ממזגים אותם.

בתא X2 ננקוב בריבית שרירותית ובתאים X8-X107 נצבור את הפרמיות מזמן התשלום לזמן הפרעון.

בתא X8 נרשום: =$C$3*$X$3^(100-A8) ונעתיק את התא לתאים X9-X107.

בתאים Y9-Y108 נציג את ערך תזרים הפרמיות מחושב בעת הפרעון אם הלקוח מפסיק לשלם את הפרמיות משך אורך החיים המקורי של הפוליסה. בתא Y8 נרשום: =sum($X$8:X8) ונעתיק את התא לתאים Y9-Y108.

בתאים Z8-Z108 נציג את ההפרש בין הערכים בעמודה Y (ערכי הכסף שהצטברו עבור המנפיק לפי הריבית השרירותית) לבין הערכים בעמודה Q (דמי הסילוקים: ערכי הכסף ששילם המנפיק) בהתאמה. בתא Z8 נרשום: =Y8-Q8 ונעתיק אותו לתאים Z9-Z108.

לכל אחד מהתאים Z8-Z108 נמצא, בעזרת חתירה למטרה, את הריבית שתאפס את הערך בתא ונרשום אותה בתא המתאים בעמודה AA. על מנת לבצע זאת לתאים נשתמש במקרו. (מקרו מס 2)

חישוב אלטרנטיבי של התאים Y8-Y108.

בתא AC2 נרשום ריבית שרירותית ובתאים AC8-AC108 נציג את ערכי הפוליסה הרטרוספקטיביים עם הפרמיה שחושבה בחלק (א) על פי הבסיס לפיו חושבה הפרמיה למעט ה**ריבית** השנתית השווה לריבית השנתית השרירותית בתא AC2.

בתאים AD8-AD108 נציג את ערכי הפרמיות הנצברות לפי ריבית שרירותית הנתונה בתא AC2. בתא AD8 נרשום: =AC8*$AC$3^(100-A8) ונעתיק את התא לתאים AD9-AD108 .

חישוב אלטרנטיבי של התאים Y8-Y108.

בתא AF2 נרשום ריבית שרירותית. בתאים AF8-AF108 נציג בעזרת נובחת רקורסיה את התאים הדרושים. בתא AF9 נרשום: =AF8+$C$3*$F$3^(100-AF3) ונעתיק את התא לתאים AF10-AF108.

דוגמה 5:

פוליסה בערך מובטח של 100,000 ש"ח הונפקה ב- 1.1.1964 ל 30 שנה. תשלומי הפרמיה הם

ב- 1.1, 1.4, 1.7, ו ה- 1.10 מידי שנה.

ב- 1.10.1979 , לפני תשלום הפרמיה, הוקטנו תשלומי הפרמיות שישולמו מה- 1.10.1979 ל- 100 ש"ח, ו ב- 1.5.1983 הודיע הלקוח על הפסקת תשלומי הפרמיות כליל.

(א) חשב את גובה הפרמיה הרבעונית המקורית,

(ב) חשב את הערכים הרטרוספקטיביים והפרוספקטיביים של הפוליסה מידי חודש משך חייה (התחשב בכל השינויים שחלו)

דמי הפידיון בזמן הפרישה שווים לערך הפוליסה הרטרוספקטיבי בזמן הפרישה,

דמי הסילוקים שווים להצטברות ערך הפוליסה הרטרוספקטיבי בזמן הפרישה מחושב בזמן הפרעון.

(ג) חשב את דמי הפידיון של הבעל הפוליסה הפורש בזמן k , עבור $k = 0,1,\ldots,120$,

(ד) חשב את דמי הסילוקים של הבעל הפוליסה הפורש בזמן k , מחושב בעת הפרישה עבור $k = 0,1,\ldots,120$,

(ה) חשב את ערך הפדיון ב- 1.5.1983,

(ו) חשב את ערך הסילוקים ב- 1.5.1983.

הערה:

כל החישובים הם על בסיס ריבית שנתית של 8% .

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 4"** בגיליון בשם **"דוגמה 5 "**.

בתא A2 נציג את הריבית החודשית המתאימה לריבית השנתית של 8% (‎=1.08^(1/12)‎).

לנוחות החישוב נציג בעמודה B את השנים, $64, 65, \ldots$ ובעמודה C את המספר הסידורי של החודשים בשנה.

בתא B8 נרשום ‎=64+INT(A8/12)‎, את התא B8 נעתיק לתאים B9-B368. (פונקצית ה- **INT** נותנת את החלק השלם של המספר המופיע בסוגרים למשל: ‎=INT(3.8)=3‎).

בתא C8 נרשום ‎=1+3*MOD(A8,12)‎, את התא C8 נעתיק לתאים C9-C368. (פונקצית ה- **MOD**

נותנת את השארית מהמספר הראשון המופיע בסוגרים על פי חלוקה במספר השני שמופיע בסוגרים

למשל: MOD(9,4)=1, MOD(13,5)=3).

(א)

בתאים E8-E127 נחשב את תזרים הפרמיות מהוון לעת ההנפקה לפרמית יחידה. בתא E8

נרשום: =1*IF(mod(A8,3)=0, "1")*$A$2^-A8, ונעתיק את התא לתאים E9-E367. בתא E7

נחשב את ערך התזרים.

בתא F7 נרשום את ערך הסכום המובטח מחושב בעת ההנפקה =100000*1.08^-30.

ממשוואת הערך נקבל בתא E2 את ערך הפרמיה הרבעונית ונרשום: =F7/E7.

(ב)

בעמודה H נציג את הפרמיות החודשיות ששולמו בפועל משך חיי הפוליסה. בתא H8 נרשום:

$E$2*and(A8<=186,mod(A8,3)=0)+100*and(A8>186,A8<232, mod(A8,3)=0)

נעתיק את התא לתאים H9-H268.

ערכים רטרוספקטיביים:

בעמודה I נציג את הערכים **הרטרוספקטיביים** של הפוליסה. בתא I8 נרשום: 0=, בתא I9 נרשום:

=(I8+H8)*$A$2. את תא I9 נעתיק לתאים I10-I368.

ערכים פרוספקטיביים:

בעמודה J נציג את הערכים **הפרוספקטיביים** של הפוליסה. בתא J368 נרשום =I368,

(הסכום המובטח המעודכן) בתא J367 נרשום =J368/$A$2-H367. את תא J367 נעתיק

לתאים J8-J366.

(ג)

בתא L8 נרשום: =I8 ונעתיק את התא לתאים L9-L368.

(ד)

בתא M8 נרשום: =I8*$A$2^(360-A8) ונעתיק את התא לתאים M9-M368.

(ה)

בתא O2 נרשום: =I240,

(ו)

בתא O4 נרשום: =M240.

דוגמה 6:

B מלווה ל- A סכום כסף לעשרים שנה. A מחזיר חלק מההלוואה על ידי עשרים תשלומים שנתיים בפיגור בגובה 50 ש"ח כל אחד. על מנת להחזיר את יתרת ההלוואה רוכש A פוליסה לעשרים שנה. בתמורה משלם A פרמיות שנתיות שוות מראש משך חיי הפוליסה המחושבות על בסיס: **ריבית:** שנתית השווה ל 4% בעשר השנים הראשונות, וריבית שנתית השווה ל- 3.5% ביתרת הזמן,

הוצאה: 2% מכל פרמיה כולל הראשונה.

מנפיק פוליסה משלם ישירות ל- B בעת הפירעון את הסכום המובטח.

התשואה השנתית נטו של B על כל העסקה שווה ל- 4.5%. הריבית השנתית של A על כל העסיקה במודל ריבית שנתית קבועה שווה ל- 5%.

חשב את הסכום המובטח, את הפרמיה, ואת גובה ההלוואה.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 4"** בגיליון בשם **"דוגמה 6 "**.

בתאים B9-B28 נציג את הריביות שבבסיס החישוב של הפרמיות בפוליסה. בתאים B9-B18 נרשום: 1.04, בתאים B19-B28 נרשום: 1.035.

בתאים C8-C28 נציג את ערכי ההיוון המתאימים לריביות בעמודה B (את ערכי הפונקציה v).

בתא C8 נרשום: 1, בתא C9 נרשום: =C8/B9, ונעתיק את התא C9 לתאים C10-C28.

ראשית ננקוב בתא E2 ערך שרירותי לסכום המובטח של הפוליסה ונחשב את הפרמיה המתאימה לסכום המובטח הנקוב.

בתאים E8-E27 נציג את ערכי הפרמיות המהוונות לעת ההנפקה לפרמיה בגובה 1 ₪. בתא E8

נרשום: 0.98*C8= ונעתיק אותו לתאים E9-E27. בתא E7 נציג את ערך תזרים הפרמיות מהוון לעת ההנפקה לפרמיה בגובה 1 ₪.

בתא F7 נציג את ערך הטבת הפרעון מהוונת לעת ההנפקה ונרשום: E2*C28=.

בתא F2 נציג את הפרמיה המתאימה ונרשום: F7/E7=.

המלווה B

B משלם בזמן אפס את סכום ההלוואה, מקבל עשרים תשלומים שנתיים בפיגור בגובה 50 ש"ח כל אחד ומקבל בנוסף לאחר עשרים שנה את הסכום המובטח S של הפוליסה שרכש הלווה A. לכן: ערך תזרים ה- 50 ₪ מהוון לראשית לפי ריבית של 4.5% בתוספת ערך הטבת הפרעון של הפוליסה מהוונת לראשית לפי ריבית של 4.5% שווה לגובה ההלוואה.

בעמודה H נציג תזרים של עשרים תשלומים בפיגור כל אחד בגובה 1 ש"ח מהוונים לראשית לפי ריבית שנתית של 4.5%. בתא H9 נרשום 1.045^-A9= ונעתיק אותו לתאים H10-H28. בתא H7 נציג את ערכו של התזרים מהוון לראשית.

בתא G4 נציג את ערך ההלוואה שהלווה B, ונרשום: 50*H7+E2*1.045^-20=

הלווה A

A מקבל את סכום ההלוואה, משלם עשרים תשלומים מראש כל אחד בגובה הפרמיה המתאימה לסכום המובטח השרירותי, ובנוסף משלם עשרים תשלומים בפיגור בגובה 50 ש"ח כל אחד. לכן: ערך תזרים ה- 50 ₪ משולם בפיגור מהוון לראשית לפי ריבית של 5% בתוספת תזרים הפרמיות המשולם מראש מהוון לראשית לפי ריבית של 5% שווה לגובה ההלוואה.

בתאים G8-G28 נרשום תזרים עזר של תשלומים כל אחד בגובה 1 ש"ח מהוונים לעת ההנפקה לפי תשואה שנתית של 5%. בתא G8 נרשום: 1.05^-A8= ונעתיק אותו לתאים

G9-G28. בתא G3 נציג את ערך ההלוואה שקבל A, ונרשום:

=50sun(G9:G28)+F2*sum(G8:G27)

ערך ההלוואה שנתן הלווה B (או שלקח המלווה A) חייב להיות שווה לערך ההלוואה שקבל הלווה A.

בתא G5 נרשום : =G3-G4. על מנת לקבל את הסכום המובטח הנכון אנו צריכים לשנותו כך שהערך בתא G5 יהיה שווה ל- 0. נבצע זאת בעזרת חתירה למטרה: **קבע תא**: G5, **לערך**: 0, **תוך שינוי התא**: E2. לאחר הפעלת החתירה למטרה נקבל את הסכום המובטח הנכון ב-E2 ואת הפרמיה המתאימה ב- F2, ואת גובה ההלוואה הנכון בתא G4 או G3.

דוגמה 7:

A מקבל משכנתה לעשרים שנה בגובה 500,000 ש"ח בריבית שנתית השווה ל- 11%. A מחזיר מידי סוף שנה רק את הריבית שהוא חייב. על מנת להחזיר את הקרן בסוף תקופת ההלוואה רוכש A בעת מתן ההלוואה פוליסה לעשרים שנה בסכום מובטח השווה לקרן (500,000 ש"ח). הפרמיות משולמות שנתית ומחושבות על בסיס: **ריבית:** שנתית שווה ל- 12%, **הוצאה ראשונית:** 1,500 ש"ח בתוספת 40% מהפרמיה הראשונה, **הוצאת חידוש:** 100 ש"ח, החל מתשלום הפרמיה השניה.

(א) חשב את גובה הפרמיה השנתית שמשלם A על מנת להבטיח את מימוש הפוליסה,

(ב) חשב את הריבית לה זכה הלווה A על כל העיסקה במודל ריבית שנתית קבועה.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 4"** בגיליון בשם **"דוגמה 7 "**.

(א)

נרשום בתא C2 את הערך 7000, גובה שרירותי של הפרמיה השנתית. בעמודה C נציג את תזרים הפרמיות השקלי נטו: בתא C8 נרשום =(0.6*C3-1500)*1.12^-A8,

בתא C9 נרשום: =($C$3-100)*1.12^-A9. את התא C9 נעתיק לתאים: C10-C27, ובתא C7 נציג את ערך התזרים.

בתא D7 נציג את הסכום המובטח מהוון לעת ההנפקה (=500000*1.12^-20),

בתא C4 נציג את משוואת הערך לעת ההנפקה ונרשום =C7-D7. על מנת לקבל את הפרמיה הנכונה אנו צריכים לשנותו כך שהערך בתא C4 יהיה שווה ל- 0. נבצע זאת בעזרת חתירה למטרה: **קבע תא**: C4, **לערך**: 0, **תוך שינוי התא**: C2. לאחר הפעלת החתירה למטרה נקבל בתא C2 את הפרמיה המבוקשת.

(ב)

ל A תזרים המזומנים הבא: 500,000 ₪ בסימן חיובי בעת מתן ההלוואה, עשרים תשלומי ריבית שנתיים בפיגור בגובה 5,500 ₪ כל אחד בסימן שלילי, ובנוסף עשרים תשלומי פרמיה מראש כל אחד בגובה הפרמיה שחושב בחלק (א), בסימן שלילי. הריבית היחידה (במידה וקימת) המאפסת את ערך התזרים בנקודת זמן שרירותית היא הריבית לה זכה הלווה במודל ריבית קבועה.

בתא F2 נרשום 9, אחוז ריבית שנתי שרירותי, ובתא F3 נרשום =1+F2/100.

בעמודה F נציג את טור ההיוון מחושב לעת ההנפקה לפי התשואה המופיעה בתא F3. בתא F8 נרשום: =$F3$1^-A8, את תא F8 נעתיק לתאים F9-F28.

הלווה A מחזיר את ההלוואה בגובה 500,000 ש"ח בשני תזרימים:

(a) עשרים תשלומים שנתיים בפיגור כל אחד בגובה 500,000*0.11,

(b) עשרים תשלומי פרמיה שנתיים מראש כל אחד בגובה P המופיע בתא C3.

ערך התזרים (a) מהוון לעת ההנפקה לפי הריבית השנתית שנתונה בתא F2 שווה ל: 500,000*0.11*sum(F9:F28). ערך התזרים (b) מהוון לעת ההנפקה לפי הריבית השנתית שנתונה בתא F2 שווה ל: C3*sum(F8:F27). בתא F4 נרשום את משוואת הערך מחושב בעת מתן ההלוואה: =500,000*0.11*sum(F9:F28)+ C3* sum (F8: F27)-500,000. על מנת לקבל את התשואה הנכונה אנו צריכים לשנותה כך שהערך בתא F4 יהיה שווה ל- 0. נבצע זאת בעזרת חתירה למטרה: **קבע תא**: F4, **לערך**: 0, **תוך שינוי התא**: F2. לאחר הפעלת החתירה למטרה נקבל בתא F2 את התשואה השנתית הנכונה.

דוגמה 8:

פוליסה בסכום מובטח השווה ל- 100,000 ₪ מגיעה לפרעונה לאחר מספר מיקרי של חודשים N.

הפרמיות משולמות חודשית מראש משך חיי הפוליסה. הפרמיות מחושבות על בסיס: **ריבית**: שנתית, 5% בשלוש השנים הראשונות הראשונות, 7% בשתי השנים העוקבות, 9% בשתים וחצי השנים שלאחר מכן, ו 11% ביתרת הזמן, **הוצאה ראשונית**: 1,000 ₪ בתוספת 3% מהפרמיה הראשונה, **הוצאת חידוש**: 50 ₪ בתוספת 2% מכל פרמיה החל מהפרמיה השניה.

המשתנה המיקרי N מקבל את הערכים $1,2,\ldots,120$. N מקבל את הערך k בהסתברות השווה ל- $C \cdot 0.95^{k}$ (C מספר חיובי), $k = 1,2,\ldots,120$.

(א) חשב את ערכו של C,

(ב) חשב את ערכי הפרמיה עבור ערכי N השונים,

(ג) חשב את הערך הממוצע של הפרמיה,

(ד) חשב את הפרמיה המבטיחה שתוחלת הרווח\הפסד של **מנפיק** הפוליסה מחושב בזמן **ההנפקה** שווה לאפס. הנח שמנפיק הפוליסה יכול להשקיע כסף על פי מודל הריבית לפיו חושבו ערכי הפרמיה,

(ה) חשב את הפרמיה המבטיחה שתוחלת הרווח\הפסד של **מנפיק** הפליסה מחושב בזמן **הפרעון** שווה לאפס. הנח שמנפיק הפוליסה יכול להשקיע כסף על פי מודל הריבית לפיו חושבו ערכי הפרמיה,

(ו) חשב את הפרמיה המבטיחה שתוחלת הרווח\הפסד של **בעל הפוליסה** מחושב בזמן **ההנפקה** שווה לאפס. הנח שבעל הפוליסה יכול להשקיע כסף על פי מודל הריבית לפיו חושבו ערכי הפרמיה,

(ז) חשב את הפרמיה המבטיחה שתוחלת הרווח\הפסד של **בעל הפליסה** מחושב בזמן **הפרעון** שווה לאפס. הנח שבעל הפוליסה יכול להשקיע כסף על פי מודל הריבית לפיו חושבו ערכי הפרמיה.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 4"** בגיליון בשם **"דוגמה 8 "**.

(א)

בתאים C9-C128 נרשום את ההסתברויות ,ללא הקבוע C. בתא C9 נרשום: =0.95^A8 ונעתיק את התא לתאים C10-C128. בתא C7 נסכם את איברי התאים C9-C128. בתא C2 נחשב את C ונרשום: =1/C7.

בתאים F2-F5 נציג את הריביות החודשיות המתאימות לריביות השנתיות של 5%, 7%, 9%, ו 11%, בהתאמה.

בתאים E9-E128 נציג לכל חודש וחודש את הריבית החודשית המתאימה. בתאים E9-E44 נרשום $F$2, בתאים E45-E68 נרשום $F$3, בתאים E69-E98 נרשום $F$4 , בתאים E99-E128 נרשום $F$5.

בתאים F8-F128 נציג את ערכי ההיוון: את הפונקציה v(k). בתא F8 נרשום =1, בתא F9 נרשום: =F8/E9, ואת התא F9 נעתיק לתאים F10-F128.

סימונים:

יהי **A(r)** ערך תזרים הפרמיות **<u>נטו</u>**, ל- 1 ₪ פרמיה, מהוון לעת ההנפקה עם זמן הפרעון שווה ל- r,

יהי **A(1,r)** ערך תזרים הפרמיות, ל- 1 ₪ פרמיה, מהוון לעת ההנפקה עם זמן הפרעון שווה ל- r,

יהי **B(r)** ערך תזרים ההוצאות השקליות מהוון לעת ההנפקה עם זמן הפרעון שווה ל- r,

יהי **C(r)** ערך הטבת הפרעון מהוון לעת ההנפקה עם זמן הפרעון שווה ל- r,

תהי **P(r)** הפרמיה המתאימה לזמן הפרעון r,

יהי **E** אופרטור התוחלת.

(ב)

פרמיות נטו:

בתאים H8-H127 נציג את ערכי הפרמיות **נטו** מהוונות לעת ההנפקה לפרמיה בגובה 1 ₪ בהנחה שזמן פרעון שווה ל- 120. בתא H8 נרשום: 0.97*F8=, בתא H9 נרשום: 0.98*F9=. ונעתיק את התא H9 לתאים H10-H127.

בתאים I9-I128 נציג את ערכי תזרימי הפרמיות **נטו** המהוונים לזמן ההנפקה לזמני הפרעון השונים (נחשב את ערכי A(r), עבור r מ 1 עד 120). בתא I9 נרשום: (sum($H$8:H8=, (A(1) המתאים לזמן הפרעון 1) ונעתיק את התא לתאים I10-I128. (הערך בתא I128 , A(120) מתאים לזמן הפרעון 120)

הוצאות שקליות:

בתאים J8-J127 נציג את ערכי ההוצאות השיקליות מהוונות לעת ההנפקה בהחה שזמן פרעון שווה ל- 120.

בתא J8 נרשום: 1,000*F8=, . בתא J9 נרשום: 50*F9=. ונעתיק את התא J9 לתאים J10-J127.

בתאים K9-K128 נציג את ערכי תזרימי ההוצאות השקליות המהוונים לזמן ההנפקה לזמני הפרעון השונים (את ערכי B(r) עבור r מ 1 ועד 120). בתא K9 נרשום: (sum($J$8:J8=, (B(1) המתאים לזמן הפרעון 1) ונעתיק את התא לתאים K9-K128. (הערך בתא K128 , B(120) מתאים לזמן הפרעון 120)

הטבת הפרעון:

בתאים L9-L128 נציג את ערכי הטבת הפרעון מהוונות לעת ההנפקה לזמני הפרעון השונים (את ערכו של C(r) עבור r מ- 1 עד 120). בתא L9 נרשום 100,000*F9= ((C(1) המתאים לזמן הפרעון 1) ,ונעתיק את התא לתאים L10-L128, (הערך בתא L128 , C(120) מתאים לזמן הפרעון 120)

חישוב הפרמיה המבוקשת P:

אם זמן הפרעון הוא r, $r = 1, \ldots, 120$ (N=r), משוואת הערך של הפוליסה

הנפרעת בזמן r שווה ל:

.P(r)*A(r)=B(r)+C(r)

לכן עבור $r = 1, \ldots, 120$:

$$P(r) = \frac{B(r) + C(r)}{A(r)} .$$

בתאים M9-M128 נחשב את הפרמיות המתאימות לערכי המ.מ. N בהתאמה (את ערכי P(r)). בתא M9 נרשום: L9+K9)/I9)= (ונקבל את P(1) המתאימה לזמן הפרעון 1) ונעתיק את התא לתאים M10-M128. (הערך בתא M128, P(120) מתאים לזמן הפרעון 120)

חישוב אלטרנטיבי של הפרמיות:

בתא P2 ננקוב בערך של זמן הפרעון r (בערך של המשתנה המיקרי N), ובתא P3 ננקוב בערך שרירותי של הפרמיה P(r), המתאימה לזמן הפרעון r הנתון בתא P2,

בתאים O8-O127 נציג את תזרים תשלומי הנטו שמקבל מנפיק הפוליסה מהוונים לעת ההנפקה לזמן הפרעון הנקוב בתא P2 ולערך הפרמיה הנקובה בתא P3.

בתא O8 נרשום:("1" ,=(0.97*P3-1,000)*F8*IF(A8<$P$2.,. בתא O9 נרשום: ("1" ,=(0.98*$P$3-50)*F9*IF(A8<$P$2, ונעתיק את התא לתאים O10-O127.

בתא O7 נציג את ערך תזרים תשלומי הנטו שמקבל מנפיק הפוליסה עבור הערך הנקוב של N ושל הפרמיה ונרשום: =sum(O8:O127) .

בתא P7 נציג את ערכו של v(r) (פונקצית ההיוון עבור ערכו של r הנתון בתא P2).

בתא P8 נרשום: ("1" ,F8*IF(A8=$P$2, ונעתיק את התא לתאים P9-P128.

בתא P7 נרשום: =sum(P8:P128)

בתא Q4 נציג את הטבת הפרעון מהוונת לעת ההנפקה ונרשום: =100,000*P7

(נחשב את C(r))

בתא P4 נציג את משוואת הערך ונרשום: =Q4-O7.

בעזרת חתירה למטרה נמצא את הפרמיה המתאימה לערך N הנקוב בתא P1: **קבע תא**: P5, **לערך**: 0, **תוך שינוי התא**: P3. לאחר הפעלת החתירה למטרה נקבל בתא P3 את הפרמיה המתאימה לערך N הנקוב בתא P2.

בעזרת מאקרו מס' 5 נחשב בתאים Q9-Q128 את הפרמיה מתאימה לערכי המ.מ. N, מהערך 1 ועד ב הערך 120.

(ג)

בתאים S9-S128 נציג את ערכי ההסתברויות. בתא S9 נרשום: =C9*$C$2 ונעתיק את התא לתאים S10-S128.

הפרמיה המיקרית, P(N), מקבלת ערכים הנתונים בתאים M9-M128 בהסתברויות הנתונות בתאים S9-S128 בהתאמה. הפרמיה הממוצעת (או תוחלת הפרמיה המיקרית: EP(N)) שווה לסכום מכפלות ערכי הפרמיות (הנתונים בעמודה M) בהסתברויות (הנתונות בעמדה S). בתאים T9-T128 נחשב מכפלות אלו. בתא T9 נרשום: =M9*S9 ונעתיק את התא לתאים T10-T128 . בתא T2 נחשב את התוחלת המבוקשת (EP(N)) ונרשום: =sum(T9:T128).

(ד)

תהי **Q** הפרמיה המבוקשת.

אם זמן הפרעון הוא r, $r = 1, \ldots, 120$,(N=r), אז ערכו של הרווח\הפסד המיקרי של מנפיק הפוליסה מחושב בעת ההנפקה שווה ל: **Q*A(r)-B(r)-C(r**).

ערכו הממוצע של הרווח\הפסד של מנפיק הפוליסה מחושב בעת ההנפקה שווה ל:

Q*E[A(N)]-EB(N)-EC(N)

אם תוחלת הרווח\הפסד של מנפק הפוליסה מחושב בעת ההנפקה שווה לאפס אז:

$$Q = \frac{EB(N) + EC(N)}{EA(N)}.$$

בתאים V8-V128 נחשב את סכום ערכי ההוצאות השיקליות (עמודה K) מוכפל בהסתברויות המתאימות (עמודה S). בתא V8 נרשום: =K8*S8, ונעתיק את התא לתאים V9-V128. בתא V7 נחשב תוחלת ההוצאות השיקליות מהוונת לעת ההנפקה ונרשום: =sum(V8:V128) (נקבל את EB(N)).

בתאים W8-W128 נחשב את ערכי הטבת הפרעון (בעמודה L) מוכפל בהסתברויות המתאימות (עמודה S). בתא W8 נרשום: =L8*S8, ונעתיק את התא לתאים W9-W128. בתא W7 נחשב תוחלת ההוצאות השיקליות מהוונת לעת ההנפקה ונרשום: =sum(W8:W128) (נקבל את EC(N)).

בתאים X8-X128 נחשב את מכפלת ערכי הפרמיה נטו ל 1 ₪ (עמודה I) בהסתברויות המתאימות (עמודה S). בתא X8 נרשום: =I8*S8 ונעתיק אותו לתאים W9-W128. בתא X7 נחשב תוחלת הפרמיות נטו ל 1 ש"ח ונרשום: =sum(X8:X128) (נקבל את EA(N))

בתא V2 נחשב את ערכה של הפרמיה המבוקשת Q ונרשום: =(V7+W7)/X7.

(ה)

תהי **Q(1)** הפרמיה המבוקשת.

אם זמן הפרעון הוא r, $r = 1, \ldots, 120$,(N=r), אז ערכו של הרווח\הפסד המיקרי של מנפיק הפוליסה מחושב בעת הפרעון שווה ל: $Q(1) \cdot \frac{A(r)}{v(r)} - \frac{B(r)}{v(r)} - 100{,}000$

ערכו הממוצע של הרווח\הפסד מחושב של מנפיק הפוליסה בעת הפרעון שווה ל:

$$Q(1)\cdot E\frac{A(N)}{v(N)}-E\frac{B(N)}{v(N)}-100{,}000$$

אם תוחלת הרווח\הפסד של מנפיק הפוליסה מחושב בעת הפרעון שווה לאפס אז:

$$Q(1)=\frac{E\frac{B(N)}{v(N)}+100{,}000}{E\frac{A(N)}{v(N)}}$$

בתאים Z8-Z128 נחשב את ערכי ההוצאות השיקליות (עמודה K) מצטברות לעת הפרעון מוכפל בהסתברויות המתאימות (עמודה S). בתא Z8 נרשום: K8*S8 /F8 = ונעתיק את התא לתאים Z9-Z128. בתא Z7 נחשב תוחלת ההוצאות השיקליות מצטברות לעת הפרעון ונרשום: sum(Z8:Z128)= (נקבל את $E\frac{B(N)}{v(N)}$).

בתאים AA8-AA128 נחשב את מכפלת ערכי הפרמיה נטו ל 1 ₪ (עמודה I) שנצברו לעת הפרעון בהסתברויות המתאימות (עמודה S). בתא AA8 נרשום: I8*S8/F8 = ונעתיק אותו לתאים AA9-AA128. בתא AA7 נחשב תוחלת הפרמיות נטו ל 1 ₪ מצטברות לעת הפרעון ונרשום: sum(AA8:AA128)=   (נקבל את $E\frac{A(N)}{v(N)}$).

בתא Z2 נחשב את ערכה של הפרמיה המבוקשת Q(1) ונרשום:

(Z7+100,000)/AA7.

(ו)+ (ז)

בתאים AC9-AC128 נסכם את ערך תזרים הפרמיות ל 1 ש"ח המהוונות לעת ההנפקה שבעמודה F. בתא AC9 נרשום: sum($F$8:F8)=,(A(1,1) המתאים לזמן הפרעון 1) ונעתיק את התא לתאים AC10-AC128. (הערך בתא AB128, A(1,120) מתאים לזמן הפרעון 120).

(ו)

תהי **Q(2)** הפרמיה המבוקשת.

אם זמן הפרעון הוא r, $r = 1, \ldots, 120$, (N=r), אז ערכו של הרווח\הפסד המיקרי של

בעל הפוליסה מחושב בעת ההנפקה שווה ל: **C(r)–Q(2)*A(1,r)** .

ערכו הממוצע של הרווח\הפסד מחושב בעת ההנפקה שווה ל: **EC(N)-Q(2)*A(1,N)**

אם תוחלת הרווח\הפסד של בעל הפוליסה מחושב בעת הפרעון שווה לאפס אז:

$$Q(2) = \frac{EC(N)}{EA(1,N)}$$

בתאים AE8-AE128 נחשב את מכפלת ערכי הפרמיה ל 1 ₪ (עמודה AC)

בהסתברויות המתאימות (עמודה S). בתא AE8 נרשום: =AC8*S8 ונעתיק אותו

לתאים AE9-AE128. בתא AE7 נחשב תוחלת הפרמיות ל 1 ש"ח ונרשום:

(EA(1,N))=sum(AE8:AE128)

בתא AE2 נחשב את ערכה של הפרמיה המבוקשת Q(2) ונרשום: =W7/AE7.

(ז)

תהי **Q(3)** הפרמיה המבוקשת.

אם זמן הפרעון הוא r, $r = 1, \ldots, 120$, (N=r), אז ערכו של הרווח\הפסד המיקרי של בעל

הפוליסה מחושב בעת הפרעון שווה ל: $Q(3) \cdot \frac{A(1,r)}{v(r)} - 100{,}000$

ערכו הממוצע של הרווח\הפסד של בעל הפוליסה מחושב בעת הפרעון שווה ל:

$$Q(3) \cdot E\frac{A(1,N)}{v(N)} - 100{,}000$$

אם תוחלת הרווח\הפסד של בעל הפוליסה מחושב בעת הפרעון שווה לאפס אז:

$$Q(3) = \frac{100{,}000}{E\dfrac{A(1,N)}{v(N)}}$$

בתאים AG8-AG128 נחשב את מכפלת ערכי הפרמיה ל 1 ₪ (עמודה AC) שנצברו

לעת הפרעון בהסתברויות המתאימות (עמודה S). בתא AG8 נרשום:

=AC8*S8 /F8 . ונעתיק אותו לתאים AG9-AG128.

בתא AG2 נחשב את ערכה של הפרמיה המבוקשת Q(3) ונרשום: =100000/AG7.

דוגמה 9:

חברה מנפיקה מספר רב של פוליסות ל- 25 שנה עם סכום מובטח השווה ל- 150,000 ₪.

הפרמות מחושבות על פי הבסיס: **ריבית:** שנתית מיקרית הנקבעת בעת הנפקת הפוליסה. 12% בהסתברות 0.30, 10% בהסתברות 0.35, 8% בהסתברות 0.25, 6% בהסתברות 0.10, **הוצאה ראשונית:** 150 ₪ בתוספת 4% מהפרמיה הראשונה, **הוצאות חידוש:** 10 ₪ בתוספת 2% מכל פרמיה החל מהפרמיה השניה, **הוצאת פרעון:** 250 ₪.

(א) חשב את ארבעת ערכי הפרמיה האפשריים,

(ב) חשב את הפרמיה הממוצעת,

(ג) חשב את הפרמיה המחושבת על סמך הבסיס הנתון למעט הריבית השנתית השווה לממוצע הריביות המיקריות,

(ד) חשב את הפרמיה המבטיחה שתוחלת הרווח\הפסד של **מנפיק הפוליסה** מחושב בזמן **ההנפקה** שווה לאפס. הנח שמנפיק הפוליסה יכול להשקיע כסף על פי מודל הריבית המיקרי לפיו חושבו ערכי הפרמיה,

(ה) חשב את הפרמיה המבטיחה שתוחלת הרווח\הפסד של **בעל הפוליסה** מחושב בזמן **ההנפקה** שווה לאפס. הנח שבעל הפוליסה יכול להשקיע כסף על פי מודל הריבית המיקרי פיו חושבו ערכי הפרמיה,

(ו) חשב את הפרמיה המבטיחה שתוחלת הרווח\הפסד של **מנפיק הפליסה** מחושב בזמן **הפרעון** שווה לאפס. הנח שמנפיק הפוליסה יכול להשקיע כסף על פי מודל הריבית המיקרי לפיו חושבו ערכי הפרמיה,

(ז) חשב את הפרמיה המבטיחה שתוחלת הרווח\הפסד של **בעל הפליסה** מחושב בזמן **הפרעון** שווה לאפס. הנח שבעל הפוליסה יכול להשקיע כסף על פי מודל הריבית המיקרי לפיו חושבו ערכי הפרמיה.

פתרון:

פתרון דוגמה זו מופיע בקובץ אקסל בשם **"דוגמאות פרק 4"** בגיליון בשם **"דוגמה 9 "**.

סימונים:

יהי **i%** משתנה הריבית המקבל את הערכים $i = 12, 10, 8, 6$,

יהי **A(i)** ערך תזרים הפרמיות נטו, ל- 1 ₪ פרמיה, מהוון לעת ההנפקה לפי ריבית i,

יהי **A(1,i)** ערך תזרים הפרמיות ל- 1 ₪ פרמיה, מהוון לעת ההנפקה לפי ריבית i,

יהי **B(i)** ערך תזרים ההוצאות השקליות מהוון לעת ההנפקה לפי ריבית i,

יהי **C(i)** ערך הטבת הפרעון ברוטו מהוון לעת ההנפקה לפי ריבית I,

יהי **e(I)** אחוז הניכוי מהפרמיה הראשונה (יקבל את הערכים 0 או 4),

יהי **e** אחוז הניכוי מהפרמיה השניה ואילך (יקבל את הערכים 0 או 2).

(א)

בתא D1 ננקוב בערך של ריבית שנתית. על מנת להקל בחישובים לחלקים הבאים נציג בתא E2 את אחוז הפרמיה המשמש למימון ההוצאה הראשונית ונרשום 4 ((e(I)), ובתא E4 נציג את אחוז הפרמיה המשמש למימון הוצאת החידוש ונרשום 2 (e).

בתאים C8-C32 נציג את תזרים הפרמיות לפרמיה השווה ל- 1 ₪ מהוונים לעת ההנפקה לפי התשואה שבתא G1 ועל פי ההוצאות הנתונות בתאים E2 ו E4. בתא C8 נרשום: =(1-E2)/100, בתא C9 נרשום: =(1-$E$4/100)*$D$3^-A9. את התא C9 נעתיק לתאים C10-C32. בתא C7 נציג את ערך התזרים מהוון לעת ההנפקה לפי התשואה שבתא D1.

בתאים D8-D32 נציג את תזרים ההוצאות השקליות מהוונים לעת ההנפקה לפי התשואה שבתא

D1. בתא D8 נרשום: 150=, בתא D9 נרשום: 10*$D$3^-A9=. את התא D9 נעתיק לתאים D10-D32. בתא D7 נציג את ערך התזרים מהוון לעת ההנפקה לפי התשואה שבתא D1.

בתא E7 נציג את ערך הטבת הפרעון ברוטו מהוונת לעת ההנפקה לפי התשואה שבתא D1, ונרשום: 150,250*G3^-25=.

בתא D2 נציג פרמיה ונרשום: E7+D7)/C7)=

נחזור להצגת הפתרון של חלק (א)

בתאים F7-F10 נציג את ארבע הריביות הרלוונטיות ובתאים G7-G10 נחשב את הפרמיות המתאימות לריביות השונות, על ידי שינוי הריבית בתא D1 והעתקת ערך הפרמיה המתקבל בתא D2 (העתקה מיוחדת-העתקת ערך) לתא המתאים בעמודה F.

(ב)

בתאים I7-I10 נרשום את ההסתברויות המתאימות לריביות השונותהמופיעות בתאים F7-F10 בהתאמה. בתאים J7-J10 נחשב את מכפלות הפרמיות בהסתברויות של הפרמיות להתקבל. בתא J7 נרשום: I7*G7=, ונעתיק אותו לתאים J8-J10. בתא J2 נחשב את תוחלת הפרמיה המיקרית ונרשום: sum(J7:J10)=.

(ג)

בתאים L7-L10 נחשב את מכפלות הריביות בהסתברויות של הריביות להתקבל. בתא L7 נרשום: F7*I7=, ונעתיק אותו לתאים L8-L10. בתא L6 נחשב את תוחלת הריבית המיקרית ונרשום: sum(L7:L10)=.

נעתיק את ערך התוצאה שבתא L6 לתא D1 ואת ערך הפרמיה שבתא D2 נעתיק לתא L2 (העתקת ערך).

(ד)

תהי **Q** הפרמיה המבוקשת.

אם הריבית היא i, אז ערכו של הרווח\הפסד המיקרי של מנפיק הפוליסה מחושב בעת ההנפקה

שווה ל: $Q \cdot A(i) - B(i) - C(i)$

תוחלת הרווח\הפסד המיקרי של מנפיק הפוליסה מחושב בעת ההנפקה שווה ל:

$$Q \cdot EA(i) - EB(i) - EC(i)$$

אם תוחלת הרווח\הפסד של מנפיק הפוליסה מחושב בעת ההנפקה שווה לאפס אז הפרמיה

המבוקשת Q שווה ל:

$$Q = \frac{EB(i) + EC(i)}{EA(i)}$$

בתאים N7-N10 נציג את הריביות הרלוונטיות, ובתאים O7-O10 נציג את ההסתברויות של

הריביות בהתאמה.

בעזרת החישובים שבחלק (א) עם e(I)=4 ו e=2 נחשב בעמודות המטריצה P7:R10 את ערכי

תזרימי הפרמיות נטו, ל 1 ₪ פרמיה,(A(i) עמודה P) את ערכי תזרים ההוצאות השקליות (B(i)

עמודה Q), ואת ערכי הטבת הפרעון ברוטו (C(i) עמודה R).

במטריצה S7-U10 נציג את ערכי A(i), B(i), ו C(i) מוכפלים בהסתברויות המתאימות. בתאים

S6-U6 נציג את תוחלות המשתנים המיקריים A(i), B(i), ו C(i) על ידי סכום התאים 7-10

בעמודות המתאימות.

בתא T2 נציג את ערכה של הפרמיה Q ונרשום: =(U6+T6)/S6

(ה)

תהי Q(1) הפרמיה המבוקשת.

אם הריבית היא i, אז ערכו של הרווח\הפסד המיקרי של בעל הפוליסה מחושב בעת ההנפקה שווה

ל: $C(i) - Q(1) \cdot A(1, i)$

תוחלת הרווח\הפסד המיקרי של בעל הפוליסה מחושב בעת ההנפקה שווה ל:

$$EC(i) - Q(1) \cdot EA(1, i)$$

אם תוחלת הרווח\הפסד של בעל הפוליסה מחושב בעת ההנפקה שווה לאפס אז הפרמיה

המבוקשת (1) Q שווה ל: $Q(1)=\dfrac{EC(i)}{EA(1,i)}$

בעזרת החישובים שבחלק (א) עם e(l)=0 ו e=0 נחשב בתאים W7-W10 את ערכי תזרימי

הפרמיות ל 1 ₪ פרמיה,(A(1,i))

בתאים X7-X10 נציג את ערכי הכפולות של A(1,i) בהסתברויות המתאימות, ובתא X6 את

תוחלת המשתנה המיקרי A(1,i) ונרשום: =sum(X7:X10)

בתא X2 נחשב את ערכה של הפרמיה Q(1) ונרשום: =U6/X6

(ו)

תהי Q(2) הפרמיה המבוקשת.

אם הריבית היא i, ערכו של הרווח\הפסד המיקרי של מנפיק הפוליסה מחושב בעת הפרעון שווה ל:

$$Q(2)\cdot A(i)\cdot(1+i)^{25}-B(i)\cdot(1+i)^{25}-150{,}250$$

תוחלת הרווח\הפסד המיקרי של מנפיק הפוליסה מחושב בעת הפרעון שווה ל: (E אופרטור

התוחלת): $Q(2)\cdot EA(i)\cdot(1+i)^{25}-EB(i)\cdot(1+i)^{25}-150{,}250$

אם תוחלת הרווח\הפסד של מנפיק הפוליסה מחושב בעת הפרעון שווה לאפס אז הפרמיה

המבוקשת Q(2) שווה ל: $Q(2)=\dfrac{E[B(i)\cdot(1+i)^{25}]+150{,}250}{EA(i)\cdot(1+i)^{25}}$

במטריצה Z7-AB10 נציג את: ערכי $(1+i)^{25}$ (עמודה Z), ערכי $A(i)\cdot(1+i)^{25}$ (עמודה AA)

ואת ערכי $B(i)\cdot(1+i)^{25}$ (עמודה AB).

במטריצה AC7-AD10 נציג את ערכי ערכי $A(i)\cdot(1+i)^{25}$ מוכפל בהסתברויות המתאימות

(עמודה AC) ואת ערכי $B(i)\cdot(1+i)^{25}$ מוכפל בהסתברויות המתאימות (עמודה AD).

את תוחלות המשתנים המיקריים $A(i)\cdot(1+i)^{25}$, $B(i)\cdot(1+i)^{25}$ נקבל בתאים AD6,AC6

על ידי סכום התאים 7-10 בעמודות המתאימות.

בתא AC2 נציג את ערכה של הפרמיה Q(2) ונרשום: (150,250+AD6)/AC6

(ז)

תהי Q(3) הפרמיה המבוקשת. אז ערכו של הרווח\הפסד המיקרי של בעל הפוליסה מחושב בעת

הפרעון לפי ריבית i שווה ל: $150{,}250 - Q(3)\cdot A(1,i)\cdot(1+i)^{25}$

תוחלת הרווח\הפסד המיקרי של בעל הפוליסה מחושב בעת הפרעון שווה ל: (E אופרטור

התוחלת): $150{,}250 - Q(3)\cdot EA(1,i)\cdot(1+i)^{25}$

אם תוחלת הרווח\הפסד של בעל הפוליסה מחושב בעת הפרעון שווה לאפס אז הפרמיה

המבוקשת (1) Q שווה ל: $Q(3) = \dfrac{150{,}250}{EA(1,i)\cdot(1+i)^{25}}$

בתאים AF7-AF10 נציג את ערכי ערכי המשתנה $A(1,i)\cdot(1+i)^{25}$,

בתאים AG7-AG10 נציג את ערכי הכפולות של $A(1,i)\cdot(1+i)^{25}$ הסתברויות המתאימות,

ובתא AG6 נציג את את תוחלת המשתנה המיקרי $A(1,i)\cdot(1+i)^{25}$ ונרשום:

=sum(AO7:AO10)

בתא AF2 נחשב את ערכה של הפרמיה Q(3) ונרשום: 150,250/AG6=