פרופ' נפתלי לנגברג

סעיף ה:

טבלאות של יותר מנפש אחת

סימונים:

(א) יהיו K_m ו K_f שני משתנים בדידים המתארים את שארית אורך החיים ביחידות שלמות של הבעל והאישה בהתאמה מעת אירוע מסוים (מתן משכנתה, הנפקת פוליסה וכיוצא בזה),

(ב) יהיו $\{l_r^m : r = 0,1,2\ldots\}$, $\{l_r^f : r = 0,1,2\ldots\}$ טבלאות תמותה המתארות את המ.מ.י"ם K_m ו K_f בהתאמה (הטבלאות מתארות את שארית אורך חיי הבעל והאישה ביחידות שלמות מעת אירוע מסוים)

הערות:

(א) המשתנה הבדיד $K_{[1]}$ מודד את הזמן ביחידות שלמות עד המוות הראשון של אחת מבין משתי הנפשות. המשתנה $K_{[1]}$ נתון על ידי:

$$K_{[1]} = \mathrm{Min}[K_m, K_f]$$

(ב) המשתנה הבדיד $K_{[2]}$ המודד את הזמן ביחידות שלמות עד המוות השני של אחת מבין שתי הנפשות. המשתנה $K_{[2]}$ נתון על ידי:

$$K_{[2]} = \mathrm{Max}[K_m, K_f\}]$$

פרופ' נפתלי לנגברג

הנחה: (אי תלות)

המ.מ.י"ם K_m ו K_f הם בלתי תלויים הסתברותית (כלומר: שארית אורך חיי הבעל ושארית

אורך חיי האישה מאז הנפקת המשכנתה הם משתנים בלתי תלויים הסתברותית).

מטרות:

המטרה הראשונית היא למצוא תחת הנחת אי התלות

(א) טבלת תמותה $\{l_r^{min} : r = 0,1,2,\ldots\}$ המייצגת את המשתנה $K_{[1]}$,

(ב) טבלת תמותה $\{l_r^{max} : r = 0,1,2\ldots\}$ המייצגת את המשתנה $K_{[2]}$.

מציאת טבלת תמותה המייצגת את $K_{[1]}$ $\{l_r^{min} : r = 0,1,2,\ldots\}$

נשים לב שעבור $r = 0, 1, 2, \ldots$ מתקיים:

$$\frac{l_r^{min}}{l_0^{min}} = P[K_{[1]} \geq r] = P[\min(K_m, K_f) \geq r) = P(K_f \geq r, K_m \geq r) =$$

$$P(K_m \geq r) \cdot P(K_f \geq r) = \frac{l_r^m}{l_0^m} \cdot \frac{l_r^f}{l_0^f}$$

לכן עבור $r = 0, 1, 2, \ldots$ מתקיים:

$$l_r^{min} = [\frac{l_0^{min}}{l_0^m \cdot l_0^f}] \cdot l_r^m \cdot l_r^f$$

מסקנה:

בעזרת טבלאות תמותה של המ.מ.י"ם K_m ו K_f והנחת אי התלות אנו טבלת תמותה

של המ.מ. $K_{[1]}$

פרופ' נפתלי לנגברג

מציאת טבלת תמותה המייצגת את $K_{[2]}$ $\{l_r^{max} : r = 0,1,2\ldots\}$

נשים לב שעבור $r = 0, 1, 2, \ldots$ מתקיים:

$$\frac{l_r^{max}}{l_0^{max}} = P[K_{[2]} \ge r] = 1 - P[\max(K_m, K_f) \le r-1) =$$

$$1 - P(K_f \le r-1, K_m \le r-1) =$$

$$1 - P(K_f \le r-1) \cdot P(K_m \le r-1) =$$

$$1 - [1 - P(K_m \ge r)] \cdot [1 - P(K_f \ge r)] =$$

$$= 1 - [1 - \frac{l_r^m}{l_0^m}] \cdot [1 - \frac{l_r^f}{l_0^f}] = \frac{l_r^m}{l_0^m} + \frac{l_r^f}{l_0^f} - \frac{l_r^m}{l_0^m} \cdot \frac{l_r^f}{l_0^f}$$

לכן עבור $r = 0, 1, 2, \ldots$ מתקיים:

$$l_r^{max} = l_0^{max} \cdot [\frac{l_r^m}{l_0^m} + \frac{l_r^f}{l_0^f} - \frac{l_r^m}{l_0^m} \cdot \frac{l_r^f}{l_0^f}]$$

מסקנה:

בעזרת טבלאות תמותה של המ.מ.י"ם K_m ו K_f והנחת אי התלות אנו טבלת תמותה

של המ.מ. $K_{[2]}$

תיאור מצב:

מוסד פיננסי מחייב בני הזוג הלוקחים משכנתה לרכוש פוליסת ביטוח המבטיחה את תשלום יתרת המשכנתה בסוף יחידת הזמן בו חל המוות הראשון של אחד מבני הזוג משך חיי המשכנתה.

פרופ' נפתלי לנגברג

מטרה:

לבנות את טבלת התמותה שהמתארת את "אורך חיי המשכנתה ביחידות שלמות"

דוגמה 10:

בעל בן 52 החשוף לטבלת התמותה AM92 ואשתו בת 50 החשופה לטבלת התמותה AF92 select רכשו משכנתה. תשלום המשכנתה נפסק בסוף שנת מותו של הראשון מבני הזוג. הצג את טבלת אורך "חיי המשכנתה ביחידות שלמות" $\{l_r : r = 0,1,2,\ldots\}$.

הנח ש: $l_0 = 100{,}000$.

פתרון:

כל החישובים יערכו בקובץ בשם **"Cha1.Examples"** בגיליון בשם **"דוגמה 10"**

ראשית נשים לב ש: $\{l_r^m = l_{52+r}^{AM92} : r = 0,1,2\ldots\}$, ו-$\{l_r^f = l_{[50]+r}^{AF92} : r = 0,1,2\ldots\}$.

לכן עבור $r = 0, 1, 2, \ldots$ מתקיים:

$$l_r = 100{,}000 \cdot \left[\frac{l_{52+r}^{AM92}}{l_{52}^{AM92}}\right] \cdot \left[\frac{l_{[50]+r}^{AF92}}{l_{[50]}^{AF92}}\right]$$

בתאים B6-B73 נציג את הטבלה $\{l_r^m = l_{52+r}^{AM92} : r = 0,1,2\ldots\}$

ובתאים C6-C73 נציג את הטבלה $\{l_r^f = l_{[50]+r}^{AF92} : r = 0,1,2\ldots\}$.

בתאים D6-D73 נציג את טבלת התמותה המבוקשת $\{l_r : r = 0,1,2\ldots\}$.

בתא D6 נרשום: 100,000 בתא D7 נרשום: = $D$6*(B7/$B$6)*(C7/$C$6)

ונעתיק את התא לתאים D8-D73.

תיאור מצב:

מוסד פיננסי מחייב בני הזוג הלוקחים משכנתה להוציא פוליסת ביטוח המבטיחה את תשלום

יתרת ההלוואה בסוף התקופה בה התרחש המוות האחרון של בני הזוג משך חיי המשכנתה.

דוגמה 11:

בעל בן 45 חשוף לטבלת התמותה E.L.T.15-m ואשתו בת 38 חשופה לטבלת התמותה

E.L.T.15- f. בני הזוג רכשו פוליסה המבטיחה למוטבים שלהם בסוף חודש מותו של

האחרון מבני הזוג תשלום של 100,000 ש"ח. הצג את $\{l_r : r = 0,1,2,\ldots\}$:טבלה

המתארת את הזמן הבדיד מעת הנפקת הפוליסה ועד שמשולמת ההטבה. הנח ש:

$l_0 = 100{,}000$.

פתרון:

כל החישובים יערכו בקובץ בשם **"Cha1.Examples"** בגיליון בשם **"דוגמה 11"**

נבחר בחודש כיחידת הזמן. ראשית נשים לב ש: $\{l_r^m = l_{540+r}^{ELT15-m} : r = 0,1,2\ldots\}$,

וש $\{l_r^f = l_{456+r}^{ELT15-f} : r = 0,1,2,\ldots\}$.

לכן עבור $r = 0, 1, 2, \ldots$ מתקיים:

$$l_r = l_0 \cdot \left[\frac{l_{540+r}^{ELT15-m}}{l_{540}^{ELT15-m}} + \frac{l_{456+r}^{ELT15-f}}{l_{456}^{ELT15-f}} - \frac{l_{540+r}^{ELT15-m}}{l_{540}^{ELT15-m}} \cdot \frac{l_{456+r}^{ELT15-f}}{l_{456}^{ELT15-f}}\right]$$

בתאים B6-B990 נציג את הטבלה $\{l_r^m = l_{540+r}^{ELT15-m} : r = 0,1,2\ldots\}$

ובתאים C6-C990 נציג את הטבלה $\{l_r^f = l_{456+r}^{ELT15-f} : r = 0,1,2\ldots\}$.

בתאים D6-D990 נציג את טבלת התמותה המבוקשת $\{l_r : r = 0,1,2\ldots\}$.

בתא D6 נרשום: 100,000 בתא D7 נרשום:

= $D$6*(B7/$B$6+C7/$C$6 -(B7/$B$6)* (C7/$C$6))

ונעתיק את התא לתאים D8-D990.

דוגמה 12:

אורכי החיים של שני מכשירים הנמדדים ביחידות זמן שלמות הם בלתי תלויים וחשופים לטבלת התמותה A1967-70 .

עבור $n = 0,1,\ldots,1,000$ חשב:

(א) את הסיכוי שבעוד n יחידות זמן עדין יפעלו שני המכשירים,

(ב) את הסיכוי שבעוד n יחידות זמן יפעל לכל הפחות מכשיר אחד,

(ג) את הסיכוי שבעוד n יחידות זמן יפעל לכל היותר מכשיר אחד,

(ד) את הסיכוי שבעוד n יחידות זמן יפעל בדיוק מכשיר אחד.

פתרון:

כל החישובים יערכו בקובץ בשם **"Cha1.Examples"** בגיליון בשם **"דוגמה 12"**

יהיו K_1, K_2 אורכי החיים של שני המכשירים הנמדדים ביחידות זמן שלמות. בנוסף יהי $K_{[1]} = \min[K_1, K_2]$ זמן הקלקול הראשון ויהי $K_{[2]} = \max[K_1, K_2]$ זמן הקלקול השני. נייח שיחידת זמן היא חודש.

(א) שני המכשירים יפעלו בזמן n אם ורק אם זמן הקלקול הראשון חל אחר זמן n. לכן ההסתברות המבוקשת עבור n נתון שווה ל:

$$.P(K_{[1]} \ge n+1) = \frac{l^{min}_{n+1}}{l^{min}_{0}}$$

(ב) לפחות מכשיר אחד יפעל בזמן n אם ורק אם עדין לא חל זמן הקלקול השני כלומר

זמן הקלקול השני גדול מ- n. לכן ההסתברות המבוקשת עבור n נתון שווה ל:

$$.P(K_{[2]} \ge n+1) = \frac{l^{max}_{n+1}}{l^{max}_{0}}$$

(ג) לכל היותר מכשיר אחד יפעל בזמן n אם ורק אם הקלקול הראשון חל בזמן n או לפני

זמן n. לכן ההסתברות המבוקשת עבור n נתון שווה ל:

$$.P(K_{[1]} \le n) = 1 - P(K_{[1]} \ge n+1) = 1 - \frac{l^{min}_{n+1}}{l^{min}_{0}}$$

(ד) בזמן n יפעל בדיוק מכשיר אחד אם ורק אם הקלקול הראשון חל לפני זמן n

והקלקול חל אחר זמן n. לכן ההסתברות המבוקשת עבור n נתון שווה ל:

$$P(K_{[1]} \le n, K_{[2]} > n) = P(K_1 \le n, K_2 > n) + P(K_2 \le n, K_1 > n) =$$

$$.$$

$$2 \cdot P(K_1 \le n, K_2 > n) = 2 \cdot P(K_1 \le n) \cdot P(K_2 > n) =$$

$$2 \cdot [1 - P(K_1 \ge n+1)] \cdot P(K_2 \ge n+1)$$

$$2 \cdot [1 - \frac{l^{A1967-70}_{n+1}}{l^{A1967-70}_{0}})] \cdot \frac{l^{A1967-70}_{n+1}}{l^{A1967-70}_{0}}$$

מסקנה:

על מנת לחשב את ההסתברויות המבוקשות עלינו להציג את טבלת התמותה

A1967- 70 את טבלת המינימום וטבלת המכסימום כאשר יחידת הזמן היא חודש.

שלב מקדים: הצגת שלוש הטבלאות החודשיות.

אל התאים B6-B1338 נעתיק מגיליון מספר 5 מהקובץ בשם "**A1967-70**"

את הטבלה החודשית A1967-70.

בתאים C6-C1338 נציג את טבלת המינימום המתאימה לטבלה המוצגת

בעמודה B. בתא C6 נרשום 100,000= בתא C7 נרשום: =$C$6*(B7/$B$6)

ונעתיק את התא לתאים C8-C1338.

בתאים D6-D1338 נציג את טבלת המכסימום המתאימה לטבלה המוצגת

בעמודה B. בתא D6 נרשום 100,000= בתא D7 נרשום:

=$C$6*(2*(B7/$B$6) - (B7/$B$6)^2) ונעתיק את התא לתאים D8-D1338.

(א) בתא G6 נרשום =C7/$C$6 ונעתיק את התא לתאים G7-G1006,

(ב) בתא H6 נרשום =D7/$D$6 ונעתיק את התא לתאים H7-H1006,

(ג) בתא I6 נרשום =1-C7/$C$6 ונעתיק את התא לתאים I7-I1006,

(ד) בתא J6 נרשום =(1-B7/$B$6)*B7/$B$6 ונעתיק את התא לתאים J7-J1006.

עד כה הצגנו מודלים הסתברותיים בהם שאריות אורכי החיים הם מ.מ.י"ם **בלתי תלויים** הסתברותית.

בדוגמה הבאה נבנה מודל הסתברותי בו אורכי החיים הם מ.מ.י"ם **תלויים** הסתברותית.

דוגמה 13:

כל החישובים יערכו בקובץ בשם **"Cha1.Examples"** בגיליון בשם **"דוגמה 13 "**

יהיו K_f ו K_m שאריות אורכי החיים המקרים בשנים שלמות של אישה ובעל בהתאמה ותהי

פונקצית **השרידות המשותפת** שלהם נתונה על ידי:

$$P(K_m \geq s,\ K_f \geq t) = e^{-0.04 \cdot s - 0.03t - 0.0012 \cdot s \cdot t}, \quad s, t = 0, 1, \ldots$$

ראשית נציג את פונקציות השרידות של המ.מ.י"ם K_f ו K_m (פונקציות שרידות **שוליות**)

$$P(K_m \geq s) = P(K_m \geq s, K_f \geq 0) = e^{-0.04 \cdot s}, \quad s = 0, 1, \ldots$$

פרופ' נפתלי לנגברג

$$P(K_f \ge t) = P(K_m \ge 0, K_f \ge t) = e^{-0.03 \cdot t}, \quad t = 0,1,\ldots$$

בעזרת פונקציות השרידות השוליות נציג בעמודות B ו C טבלאות תמותה להן חשופים שני בני הזוג בהתאמה (נניח שבשתי טבלאות התמותה מתקיים: $l_0 = 100{,}000$).

עתה נציג את **תוחלת** ו**שונות** שארית אורך החיים של כל אחד מבני הזוג.

חישוב התוחלות של K_f ו K_m **:**

בתאים D2 ו E2 אנו מציגים את תוחלת שאריות אורכי החיים בעזרת טבלאות התמותה שהוצגו בעמודות B ו C.

חישוב השונויות של K_f ו K_m **:**

בתאים F2 ו H2 נציג את שונות המ.מ. K_m ובתאים G2 ו I2 את שונות המ.מ. K_f.

נעבור לחישוב ה**שונות המשותפת** (ה**קווריאנס**) ו**מקדם המתאם** של המ.מ.י"ם K_f ו K_m.

חישוב השונות המשותפת (הקווריאנס) של K_f ו K_m (סימון: $\mathbf{Cov}(K_m, K_f)$)

מאחר ומתקיים (נוסחת החישוב של השונות המשותפת):

$$Cov(K_m, K_f) = EK_m \cdot K_f - EK_m \cdot EK_f$$

מספיק לחשב את תוחלת מכפלת שני המשתנים K_f ו K_m ($EK_m \cdot K_f$)

נראה שעבור שני מ.מ.י"ם בדידים T ו S המקבלים את הערכים $0, 1, 2, \ldots$ מתקיים:

$$ET \cdot S = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} P(T \ge t, S \ge s)$$

הוכחה:

$$ET \cdot S = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} t \cdot s \cdot P(T = t,\ S = s) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} [\sum_{n=1}^{s} 1] \cdot [\sum_{m=1}^{t} 1] P(T = t,\ S = s) =$$

על ידי שינוי סדר סכימות נקבל ש:

$$ET\cdot S=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[\sum_{t=m}^{\infty}\sum_{s=n}^{\infty}P(T=t,\ S=s)]=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}P(T\ge m,S\ge n)$$

נשתמש בנוסחה זו לחישוב השונות המשותפת של המ.מ.י"ם K_f ו K_m, לכן:

$$EK_m\cdot K_f=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-0.04\cdot s-0.03\cdot t-0.0012\cdot s\cdot t}=$$

$$\sum_{t=1}^{\infty}e^{-0.03\cdot t}\cdot[\sum_{s=1}^{\infty}e^{-(0.04+0.0012\cdot t)\cdot s}=\sum_{t=1}^{\infty}e^{-0.03\cdot t}\cdot G(t)$$

(כאשר: $G(t)=\sum_{s=1}^{\infty}e^{-(0.04+0.0012\cdot t)\cdot s}$. במקרה הנוכחי קל לראות, בעזרת נוסחת טור גיאומטרי, ש: $(G(t)=\dfrac{e^{-(0.04+0.0012\cdot t)}}{1-e^{-(0.04+0.0012\cdot t)}}$

בעזרת מאקרו 2 (B) נציג בתאים K7-K920 את ערכי הפונקציה G עבור $t=1,\ldots,914$.

בתא L5 נציג את $EK_m\cdot K_f$ ובתא L2 נציג את $Cov(K_m,K_f)$.

הערות:

(א) מאחר והשונות המשותפת של המ.מ.י"ם K_m,K_f אינה שווה לאפס ברור שהמ.מ.י"ם K_m,K_f תלויים הסתברותית.

(ב) בעמודה M נשתמש בנוסחה $G(t)=\dfrac{e^{-(0.04+0.0012\cdot t)}}{1-e^{-(0.04+0.0012\cdot t)}}$ על מנת לחשב את $EK_m\cdot K_f$ ואת $Cov(K_m,K_f)$ בדרך אלטרנטיבית.

חישוב מקדם המתאם של K_f ו K_m (סימון: $(\rho(K_m,K_f)$)

מאחר ומתקיים (נוסחת החישוב של מקדם המתאם):

$$\rho(K_m, K_f) = \frac{Cov(K_m, K_f)}{\sqrt{Var(K_m)\cdot Var(K_f)}}$$

בתא N2 קבלנו את ערכו של מקדם המתאם (מספר בין 1- לבין 1)

נחשב עתה את פונקצית השרידות של המ.מ.י"ם $K_{[1]} = \min[K_m, K_f]$, ושל

$K_{[2]} = \max[K_m, K_f]$.

חישוב פונקצית השרידות של $\min[K_m, K_f]$

$$P(K_{[1]} \ge t) = P(K_m \ge t,\ K_f \ge t) = \exp(-0.07\cdot t - 0.0012\cdot t^2)$$

חישוב פונקצית השרידות של $\max[K_m, K_f]$

$$P(K_{[2]} \ge t) = P[(K_m \ge t)\cup(K_f \ge t)]$$

על סמך נוסחת ההסתברות של איחוד שני מאורעות בלתי זרים נקבל ש:

$$P(K_{[2]} \ge t) = P(K_m \ge t) + P(K_f \ge t) - P(K_m \ge t, K_f \ge t) =$$

$$e^{-0.04\cdot t} + e^{-0.03\cdot t} - e^{0.07\cdot t - 0.0012\cdot t^2}$$

בעזרת פונקציות השרידות של $K_{[2]}$ ו $K_{[1]}$ נציג בעמודות O ו P טבלאות תמותה

מתאימות (נניח שבשתי טבלאות התמותה מתקיים: $l_0 = 100{,}000$).

הערה:

בעזרת שתי טבלאות תמותה אלו ניתן לחשב את התוחלת והשונות של המ.מ.י"ם

$K_{[1]}$ ו $K_{[2]}$ כפי שחשבנו את התוחלת והשונות של K_m ו K_f

פרופ' נפתלי לנגברג